

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

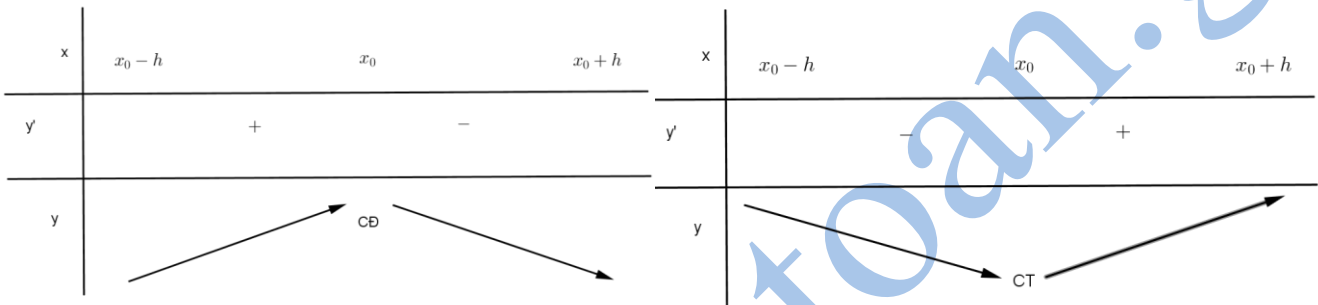
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

* **Định nghĩa:** Cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

* **Định lí 1:** Giả sử $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{0\}$ với $h > 0$. Khi đó:



(Tại x_0 có thể đạo hàm không xác định)

* **Định lí 2:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

a) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của $y = f(x)$.

b) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của $y = f(x)$.

* **Quy tắc tìm cực trị của $y = f(x)$.**

Quy tắc 1:

1. Tìm TXĐ
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2.

1. Tìm TXĐ
2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i) = 0$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của x_i .

II. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Tìm các cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

Bài giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = 3x^2 - 3 \text{ cho } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Ví dụ 2. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

Bài giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = x^3 - 4x \text{ cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y			-4		0		-4		

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(0;0)$, các cực tiểu $(-2;-4);(2;-4)$.

Ví dụ 3: Định m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Bài giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + m^2 - 1.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 11 \end{cases}$$

Với $m=1$ suy ra $y = x^3 - 3x^2 + 2, y' = 3x^2 - 6x, y'' = 6x - 6$

Ta có $\begin{cases} y'_{(2)} = 3.2^2 - 6.2 = 0 \\ y''_{(2)} = 6.2 - 6 = 6 > 0 \end{cases}$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Với $m=11$ suy ra $y = x^3 - 33x^2 + 120x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 66x + 120 \Rightarrow y'' = 6x - 66$

Ta có $\begin{cases} y'_{(2)} = 3.2^2 - 66.2 + 120 = 0 \\ y''_{(2)} = 6.2 - 66 = -54 < 0 \end{cases}$ hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Định m để hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + m}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu.

Bài giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = \frac{-x^2 + 2x + m - 4}{(1 - x)^2}$. Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x - 2m + 3$. Tìm m để hàm số có hai cực trị.

A. $-1 \leq m \leq 2$

B. $-2 \leq m \leq 1$

C. $m < -2 \vee m > 1$

D. $m < -1 \vee m > 2$.

Bài giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Delta' = m^2 - (m + 2) = m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 2$ Chọn đáp án D.

Để thuận tiện cho việc giải nhanh các câu hỏi trắc nghiệm ta có ghi nhớ sau .

Ghi nhớ 1.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

➤ Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$.

➤ Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$. Khi đó, gọi x_1, x_2 là hoành độ hai cực trị

ta có các tính chất sau. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$

Ví dụ 6: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-1)x + 2m - 5$ có hai cực trị thỏa mãn $|x_{CD} - x_{CT}| = 2$.

- A. $m = 0, m = 4$ B. $m = 1, m = 4$ C. $m = 0, m = 1$ D. $m = \pm 2$

Bài giải.

$$\begin{aligned} |x_{CD} - x_{CT}| = 2 &\Leftrightarrow (x_{CD} - x_{CT})^2 = 4 \Leftrightarrow (x_{CD} + x_{CT})^2 - 4x_{CD}x_{CT} = 4 \\ &\Leftrightarrow (2m)^2 - 4(m-1) = 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \text{ Chọn đáp án C.} \end{aligned}$$

Ghi nhớ 2.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Lấy y chia cho y' ta phân tích được $y = p(x)y' + rx + q$ vì tại các cực trị $y' = 0$ nên đường thẳng đi qua các cực trị là $y = rx + q$

Ví dụ 7: Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x + m - 2$ có hai điểm cực trị sao cho hai điểm cực trị và điểm $A(0;2)$ thẳng hàng.

Bài giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$

Lấy y chia y' ta được $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}\right)y' - \frac{2}{3}(m^2 + m + 1)x + m - 2 + \frac{1}{3}m(m+1)$

Suy ra đường thẳng đi qua hai cực trị là : $d : y = -\frac{2}{3}(m^2 + m + 1)x + m - 2 + \frac{1}{3}m(m+1)$. Hai

cực trị và $A(0;2)$ thẳng hàng khi d đi qua $A(0;2) \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$.

Đối với hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases} \quad (a)$

Đến đây có ghi nhớ sau.

Ghi nhớ 3.

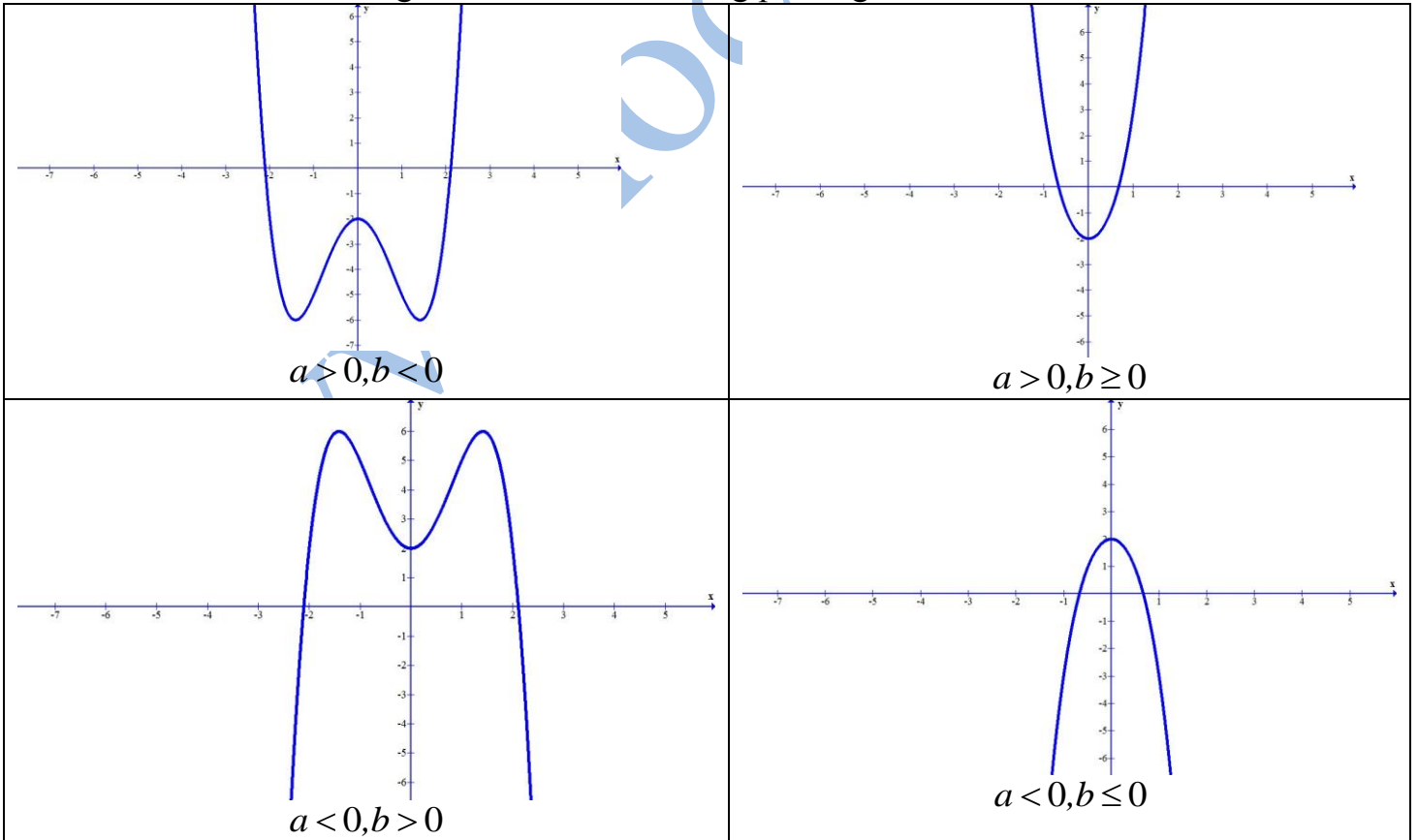
Hàm bậc 4 trùng phương luôn có cực trị, số cực trị của hàm này phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình (a). Cụ thể

- Nếu $-\frac{b}{2a} \leq 0$ tức là a,b cùng dấu hoặc $b=0$ thì phương trình (a) vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$, khi đó hàm số chỉ có một cực trị là $x=0$.
- Nếu $-\frac{b}{2a} > 0$ tức là a,b trái dấu thì phương trình (a) có hai nghiệm phân biệt khác

0, khi đó hàm số có ba cực trị. $x=0, x = \pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$. Cụ thể

- $a > 0, b < 0$ hàm số có hai cực tiểu $x = \pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$ và một cực đại $x=0$
- $a < 0, b > 0$ hàm số có hai cực đại $x = \pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$ và một cực tiểu $x=0$

Hình vẽ minh họa các dạng đồ thị hàm bậc 4 trùng phương.



Ví dụ 8: Tìm tham số m để hàm số $y = mx^4 + (2m - 3)x^2 + 5$ có ba cực trị.

- A. $m > 0$ B. $m < \frac{2}{3}$ C. $0 < m < \frac{3}{2}$ D. $m < 0 \vee m > \frac{3}{2}$

Bài giải.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m(2m-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$ Chọn C.

Ví dụ 9: Tìm tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 2m - 3)x^2 + 5m + 1$ có hai cực tiểu một cực đại.

- A. $m > 0$ B. $-1 < m < 3$ C. $m > 3$ D. $0 < m < 3$.

Bài giải.

Hàm số có hai cực tiểu một cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3 \text{ Chọn D.}$$

Từ ghi nhớ 3 ta có $a.b < 0$ thì hàm $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$,

$C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$. Hơn nữa từ hình vẽ ta cũng nhận thấy ΔABC cân tại A.

Ta có ghi nhớ sau.

Ghi nhớ 4.

- Tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB^2 = BC^2$.
- Diện tích tam giác ABC được tính bằng $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH$ với H là trung điểm

$$BC \Leftrightarrow H\left(0; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AH = \left|\frac{b^2}{4a}\right|$$

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba cực trị tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = \sqrt{3}$ B. $m = \sqrt[3]{3}$ C. $m = 3$ D. $m = \sqrt[3]{4}$.

Bài giải.

Để hàm số có ba cực trị thì $-2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m+1)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 + m + 1)$,

$C(\sqrt{m}; -m^2 + m + 1)$. Khi đó ta có $AB^2 = m + m^4$, $BC^2 = 4m$. Tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ chọn B.

Nhận xét. Trong trường hợp tổng quát ta có $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$,

$$C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ suy ra } AB = \sqrt{\left(0 + \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2 + \left(c + \frac{\Delta}{4a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$$

$$\text{Và } BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} \text{ nên } AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} = -4\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{a} = -24$$

Với nhận xét này ta hoàn toàn có thể giải nhanh ví dụ 10 như sau

$\frac{b^3}{a} = -24 \Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{1} = -24 \Leftrightarrow m^3 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$. Nhưng tất nhiên việc nhớ quá nhiều công thức sẽ khiến bạn bị hao tốn bộ nhớ.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = -1$ B. $m = 2$ C. $m = 0$ D. $m = 1$.

Bài giải.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -2(m+1) < 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;m^2)$, $B(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$,

$C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$. Suy ra $\overline{AB} = (-\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m - 1)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m - 1)$.

Tam giác ABC vuông $\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án C

Ở đây ta cũng có nhận xét tương tự như ở ví dụ trên ta chứng minh được để tam giác ABC

là một tam giác vuông thì $\frac{b^3}{a} = -8$ việc chứng minh hệ thức này cũng khá đơn giản dành cho

bạn đọc tự chứng minh.

Một số bài tập rèn luyện

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1). Tìm m để đồ thị hs (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

ĐS: $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa $m > -1$)

2. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ (1), Xác định m để hs (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị

a/ Tạo thành một tam giác đều .

ĐS:

b/ Tạo thành một tam giác vuông .

ĐS:

c/ Tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

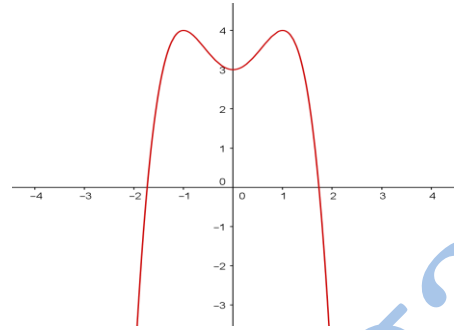
II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

Nhận biết

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Hàm số có mấy cực trị

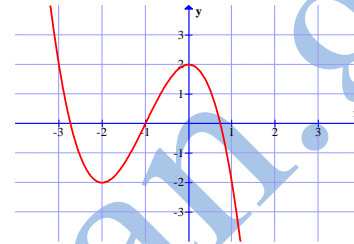
- A. 3 B. 2
C. 1 D. 4



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Hàm số có mấy cực trị

- A. 3 B. 2
C. 1 D. 4



Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y		3		$+\infty$	

Diagram showing arrows from the y-values: $-\infty$ points to 3, 3 points to -1, and -1 points to $+\infty$.

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(0;3)$, điểm cực đại là $(2;-1)$.
B. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;3)$, điểm cực tiểu là $(2;-1)$.
C. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(3;0)$, điểm cực tiểu là $(-1;2)$.
D. Hàm số đạt cực đại tại 3 và cực tiểu tại -1

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y		0		$+\infty$	

Diagram showing arrows from the y-values: $-\infty$ points to 0, 0 points to -1, and -1 points to $+\infty$.

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$
B. Hàm số có đúng một cực trị
C. Giá trị cực tiểu của hàm số là 1
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = -1$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Phát biểu nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	4	\nearrow	$+\infty$
				\searrow	$-\infty$
				-2	\nearrow
					$-\infty$

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và cực tiểu tại $x = 3$.
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 4$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ và cực tiểu tại $x = -1$.
- D. Hàm số có ba cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Phát biểu nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	\parallel	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	-2	\nearrow	2
				\searrow	$-\infty$
				-3	\nearrow
					$-\infty$

- A. Hàm số có ba cực trị.
- B. Hàm số có hai cực trị.
- C. Hàm số có đúng một cực trị.
- D. Hàm số không có cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$. Hàm số đạt cực đại tại:

- A. $x = -2$
- B. $x = 2$
- C. $x = 0$
- D. $x = \pm 2$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6$. Hàm số đạt cực tiểu tại:

- A. $x = 4$
- B. $x = -4$
- C. $x = 0$
- D. $x = 2$

Câu 9: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ đạt cực trị tại điểm có hoành độ là:

- A. 0
- B. 1
- C. -1
- D. 2

Câu 10: Cho hàm số $y = -x^2 + 2$. Câu nào sau đây **đúng** ?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$
- C. Hàm số không có cực đại
- D. Hàm số luôn nghịch biến.

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số luôn nghịch biến
- B. Hàm số luôn đồng biến;
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 12: Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

- A. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$
- B. $y = x^4 + 2x^2 - 1$
- C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$
- D. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$

Câu 13: Đồ thị hàm số nào sau đây có không có cực trị?

A. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$

B. $y = x^3 + 2x^2 - 1$

C. $y = \frac{x-2}{2x+1}$

D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$, mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. một cực tiểu và một cực đại.

B. một cực đại và không có cực tiểu.

C. một cực tiểu và hai cực đại.

D. một cực đại và hai cực tiểu.

Câu 15: Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$

A. $x = 1$

B. $x = \frac{1}{3}$

C. $x = -1$

D. $x = -\frac{1}{3}$

Câu 16: Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$

A. (2;0)

B. (0;4)

C. (0;0)

D. (-2;-16)

Câu 17: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$

A. $f_{CT} = -1$

B. $f_{CT} = 3$

C. $f_{CT} = -3$

D. $f_{CT} = 0$

Câu 18: Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x$

A. $(-1; -\frac{2}{3})$

B. $(1; \frac{2}{3})$

C. (1;0)

D. (-1;0)

Câu 19: Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

A. $x = 0$

B. $x = 2$

C. $x = -2$

D. $x = 1$

Câu 20: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x - 1$

A. $f_{CT} = -3$

B. $f_{CT} = 3$

C. $f_{CT} = 0$

D. $f_{CT} = 1$

Câu 21: Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ đạt cực tiểu tại

A. $x = -1$

B. $x = 0$

C. $x = 1$

D. $x = \pm 1$

Câu 22: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ là

A. (0;-1)

B. (0;1)

C. (-1;0)

D. (1;0)

Câu 23: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ là

A. (0;3)

B. (0;1)

C. (-1;2)

D. (1;2)

Câu 24: Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 1$ là

A. $x = 0$

B. $x = -2$

C. $x = 2$

D. $x = \pm 2$

Câu 25: Số điểm cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 26: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Cực tiểu của hàm số bằng 0

B. Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -1

D. Cực tiểu của hàm số bằng ± 1

Câu 27: Cho hàm số f có đạo hàm cấp 1 trên $(a;b)$ chứa x_0 . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây?

- A. Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .
- B. Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .
- D. Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$ thì hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

Thông hiểu

Câu 28: Bảng biến thiên sau phù hợp với hàm số nào?

- A. $y = 2x^3 - 6x$
- B. $y = -2x^3 + 6x$
- C. $y = 2x^3 - 6x + 8$
- D. $y = -2x^3 + 6x - 8$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ 4 ↘	-4	↗ $+\infty$	

Câu 29: Bảng biến thiên sau phù hợp với hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x-3}{x+1}$
- B. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$
- C. $y = \frac{-2x-3}{x+1}$
- D. $y = \frac{2x+3}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	2 ↘		$+\infty$ ↘ 2
			$-\infty$

Câu 30: Bảng biến thiên sau phù hợp với hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2$
- B. $y = -x^4 - 2x^2$
- C. $y = -x^4 + 2x^2$
- D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$	↘ -1 ↗	↘ -1 ↗	↘ -1 ↗	$+\infty$		

Câu 31: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = -\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2$ là

- A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{14}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

Câu 32: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ là:

- A. (2;0) B. $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$ C. (0;2) D. $\left(\frac{50}{27}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 33: . Hàm số f có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 34: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

Câu 35: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 3x - 4x^3$ là:

- A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 36: Số cực trị của hàm số $y = -4x^3 + 6x^2 + 1$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 37: Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ là:

- A. 2 B. 1 C. 6 D. -1

Câu 38: Hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ đạt cực trị tại điểm có hoành độ là:

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -1;1

Câu 39: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ là:

- A. ± 1 B. 0 C. 1 D. -1

Câu 40: Trong các mệnh đề sau, hãy tìm mệnh đề sai ?

- A. Hàm số $y = -2x + 1 + \frac{1}{x+2}$ không có cực trị.
B. Hàm số $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ có hai cực trị.
C. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có cực đại và cực tiểu.
D. Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có cực trị.

Câu 41: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)$. Số cực trị của hàm số là:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 42: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(x+2)$. Số cực trị của hàm số là:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 43: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2$. Số cực trị của hàm số là:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 44: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^3(x+2)$. Số cực trị của hàm số là:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Vận dụng.

Câu 45: Cho đường cong $y = x^3 - 3x^2$. Gọi Δ là đường thẳng nối liền cực đại và cực tiểu của nó. Khi đó Δ là đường thẳng

- A. đi qua điểm $M(-1; -2)$
- B. đi qua điểm $M(1; -2)$
- C. song song với trục hoành
- D. không đi qua gốc toạ độ

Câu 46: Xác định m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 1$ hoặc $m = 3$
- B. $m = 3$
- C. $m = 1$
- D. $m = -1$

Câu 47: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = -3$
- B. $m = -2$
- C. $m = 1$ hoặc $m = -2$
- D. $m = 1$

Câu 48: Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx + 2$ có cực trị.

- A. $m = 0$
- B. $m \neq 0$
- C. $m \geq 0$
- D. $m > 0$

Câu 49: Xác định m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - (m - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 1$.
- B. $m = 3$.
- C. $m = -1$.
- D. $m = 2$.

Câu 50: Với giá trị nào của m , hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 0$
- B. $m \neq 0$
- C. $m > 0$
- D. $m < 0$

Câu 51: Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ có 3 cực trị?

- A. $m > 2$.
- B. $m > -1$.
- C. $m < 0$.
- D. $m < -1$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m \neq 0$
- B. $m \leq 0$
- C. $m > 0$
- D. $m < 0$

Câu 53: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx + 1$. Tìm m để hàm số không có cực trị :

- A. $m \geq 0$
- B. $-1 \leq m \leq 0$
- C. $-1 < m \leq 0$
- D. $m \leq -1$

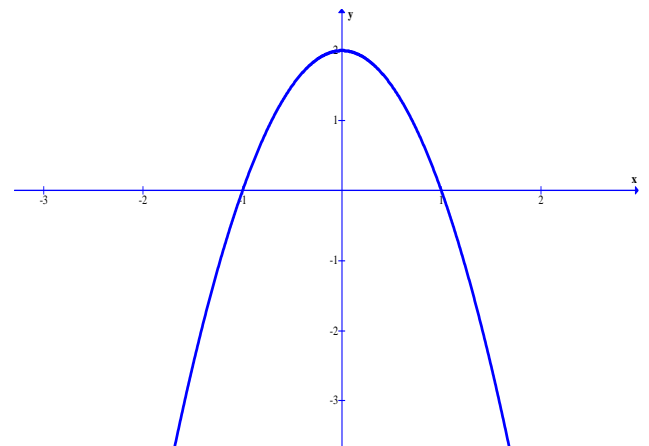
Câu 54 : Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + x + m}{x - 1}$ đạt cực tiểu và cực đại?

- A. $m \geq 2$
- B. $m < 2$
- C. $m > -2$
- D. $m \leq -2$

Câu 55 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Kết luận nào sau đây là đúng.

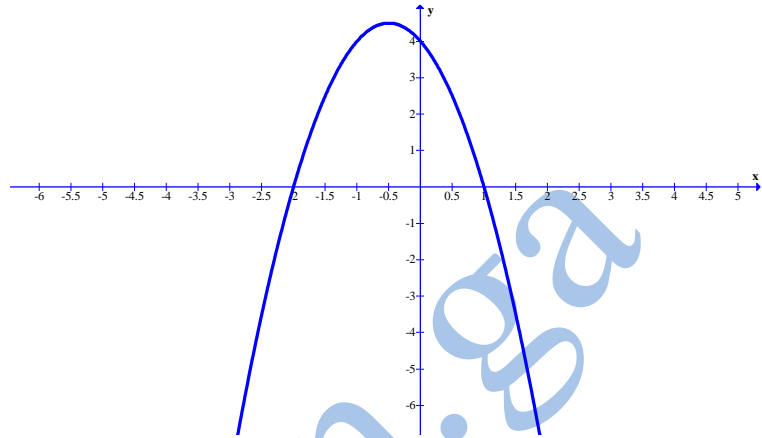
- A. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực trị.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ và cực đại tại $x = 1$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và cực đại tại $x = -1$.



Câu 56 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Kết luận nào sau đây là đúng.

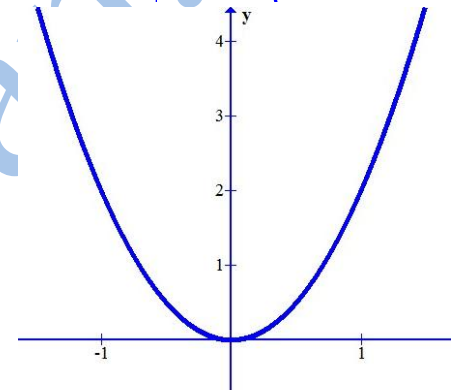
- A. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực trị.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2}$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ và cực đại tại $x = 1$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và cực đại tại $x = -2$.



Câu 57 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Kết luận nào sau đây là đúng.

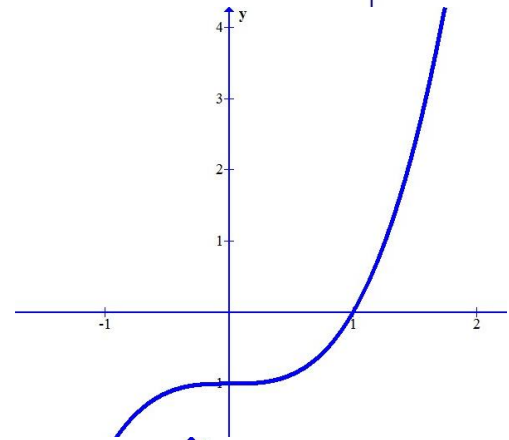
- A. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực trị.
- B. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực tiểu
- C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị
- D. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = 0$



Câu 58 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Kết luận nào sau đây là đúng.

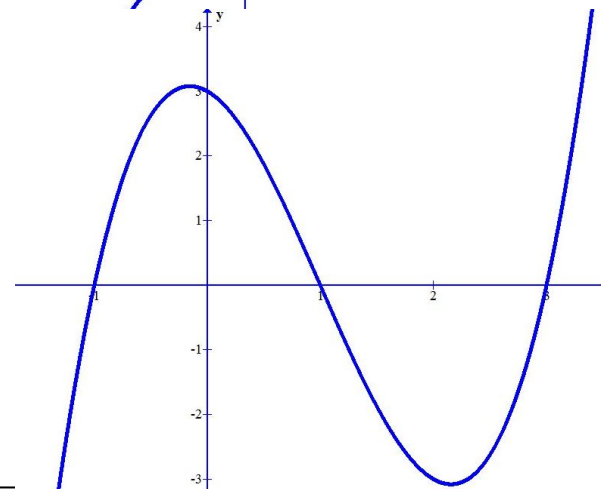
- A. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực tiểu.
- B. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực đại.
- C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$



Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Kết luận nào sau đây là đúng.

- A. Hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một cực trị.
- B. Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.
- C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị
- D. Hàm số có ba cực trị.



Vận dụng cao.

Câu 60: Cho hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 - 3mx + m$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu $x_1; x_2$ thỏa $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2x_1x_2$?

- A. $m = -1$ B. $m = -1, m = \frac{2}{3}$ C. $m = \frac{2}{3}$ D. $m = \frac{3}{2}$

Câu 61: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông.

- A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = 3$ D. $m = 2$

Câu 62: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có đồ thị (C_m) . Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d) : y = x$

- A. $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $m = \pm \frac{1}{2}$ C. $m = 0$ D. $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; m = 0$

Câu 63: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{2}$. Với giá trị nào của m hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$?

- A. $m = 2; m = 1$ B. $m = 2; m = \frac{2}{3}$ C. $m = 1; m = \frac{2}{3}$ D. $m = \frac{2}{3}; m = \frac{3}{4}$

Câu 64: Tìm tham số m sao cho khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3 - 3m$ đến gốc tọa độ là nhỏ nhất

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = 2$ D. $m = 4$

Câu 65: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m) Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các cực đại và cực tiểu tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = 3 + \sqrt{2}$ B. $m = 3 - \sqrt{2}$ C. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$ D. $m = 2 + \sqrt[3]{3}$

Câu 66: Hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Khi đó giá trị m là.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 67: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = 3$ B. $m = \sqrt[3]{3}$ C. $m = -3$ D. $m = \sqrt{3}$

Câu 68: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

B. $m = 3$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Câu 69: Biết $A(-1;0), B(3;-4)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 1$.

A. $y(1) = 2$

B. $y(1) = -2$

C. $y(1) = 1$

D. $y(1) = 3$

www.hoctoan.ga