SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 06/10/2023
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 (4,0 điểm). Giải phương trình $(x^2-10x+21)\sqrt{x-3}=x^3-11x^2+34x-27 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Bài 2 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_1=x_2=a \\ x_{n+2}=x_{n+1}+2\cdot\dfrac{\sqrt{x_n}}{(n+1)^3}, \forall n\geq 1 \end{cases}$

trong đó a là một số thực dương cho trước.

a) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=c$. Tìm số thực α để dãy (y_n) xác định bởi $y_n=n^{\alpha}(c-x_n), \forall n\geq 1$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Bài 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng CH với đường tròn (O); I là giao điểm của AT với BC; J là giao điểm của AD với EF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn HC, HE. Lấy điểm P trên EF sao cho MP song song với DE, điểm Q trên BJ sao cho EQ song song với NP.

a) Chứng minh rằng ba điểm I, E, Q thẳng hàng.

b) Gọi X là giao điểm của BH với CO, Y là giao điểm của CH với BO, Z là trực tâm tam giác DEF. Chứng minh rằng OZ chia đôi đoạn XY.

Bài 4 (5,0 điểm). Cho tập hợp $S=\{1,2,3,\ldots,2048\}$.

a) Chứng minh khẳng định sau: "Với mọi tập con X của tập S có số phần tử bằng 15, luôn tồn tại hai tập con khác rỗng rời nhau A, B của tập X sao cho $\sum\limits_{i\in A} i=\sum\limits_{j\in B} j$".

Khẳng định này còn đúng không khi số phần tử của tập X bằng 12?

b) Tập con Y khác rỗng của S thoả mãn điều kiện: $\forall y\in Y$ thì $15y\notin Y$. Tìm số phần tử lớn nhất có thể của tập Y.

——HẾT——

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH NINH BÌNH** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH** **NĂM HỌC 2023 - 2024** **MÔN: TOÁN** ***Ngày thi: 07/10/2023*** Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề) *Đề thi gồm 01 trang, 04 bài*

Bài 5 (5,0 điểm). Cho n là một số nguyên lớn hơn 4 và p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x+1)^n - px^2 - px + p^2$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 6 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(xf\left(y\right) + y^{2023}\right) = yf\left(x\right) + \left(f(y)\right)^{2023}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 7 (5,0 điểm). Bộ ba số nguyên dương (a, b, p), với p là số nguyên tố, được gọi là **"tốt"** nếu:

$$(a+b)(a^p + b^p) = 2^a + 2^b.$$

a) Chứng minh rằng không có bộ số **"tốt"** nào trong trường hợp $a \neq b$ và p lẻ.

b) Tìm tất cả các bộ số **"tốt"**.

Bài 8 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường kính AS. Đường tròn (K) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại D. Tiếp tuyến tại S của đường tròn (O) cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD tại T. Gọi P là điểm đối xứng của D qua đường thẳng TK.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tiếp xúc với đường tròn (K).

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, Δ là đường thẳng vuông góc với AD tại D, Δ' là tiếp tuyến song song với BC của đường tròn (K) (Δ' nằm cùng phía với D so với BC). Trong trường hợp Δ cắt Δ', gọi M là giao điểm của hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BC, OI đồng quy.

———**HẾT**———