SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẾN TRE

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN CÁC ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: TOÁN
Ngày thi: 14/9/2023
Thời gian: 180 phút (không kể phát đề)
(Đề thi có 01 trang)

Câu 1 (4,5 *điểm*)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases}$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 2 (4,5 *điểm*)

Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ có $deg\, P(x) \geq 2$ và có các nghiệm là $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Chứng minh rằng: nếu $x > b_i$, với $i = 1,2, \ldots, n$ thì

$$P(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \ldots + \frac{1}{x-b_n}\right) \geq 2n^2$$

Câu 3 (3 *điểm*)

Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với đường tròn (O_2) tại điểm A. Đường thẳng qua điểm A cắt các đường tròn (O_1), (O_2) lần lượt tại các điểm B, C. Tiếp tuyến tại B của (O_1) cắt đường tròn (O_2) tại hai điểm D, E. Qua điểm C, kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với (O_1) tại các điểm F, G. Chứng minh bốn điểm D, E, F, và G cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4 (4 *điểm*)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}^2}{u_1^2.u_2^2 \ldots u_n^2}$.

Câu 5 (4 *điểm*)

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ và } f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

------ HẾT ------

TSCHOOL