

Bài 1. (4 điểm)

Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \sqrt{2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n}}$, với mọi số nguyên dương n .

a) Chứng minh $a_n \leq n$, với mọi số nguyên dương n .

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$.

Bài 2. (4 điểm)

Biết tập hợp các số nguyên ký hiệu là \mathbf{Z} .

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ thỏa mãn $f(2a) + 2f(b) = f(2(a+b))$, với mọi số nguyên a, b .

Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác nhọn, không cân ABC có ba đường cao AD, BE, CF . Vẽ ba đường cao AT, EP, FQ của tam giác AEF .

a) Chứng minh hai đường thẳng PQ và BC song song với nhau.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng DT với đường tròn đường kính AT , biết K khác T . Chứng minh ba đường thẳng AK, EF, PQ đồng quy.

Bài 4. (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$, với mọi số nguyên dương n .

a) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) và tìm số dư trong phép chia u_p cho p , với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

b) Chứng minh với số nguyên dương $t > 1$ tồn tại số nguyên dương $s > t$ sao cho số ước nguyên tố của u_s lớn hơn 2 lần số ước nguyên tố của u_t .

Bài 5. (4 điểm)

a) Cho 2024 viên bi được sắp xếp thành một hàng ngang. Tính số các cách đặt 29 chiếc thẻ vào giữa các viên bi thỏa mãn ở giữa hai viên bi kề nhau chỉ có nhiều nhất một chiếc thẻ và các viên bi đã cho được chia thành 30 phần, mà mỗi phần có ít nhất 9 viên bi.

b) Cho 2024 viên bi giống nhau được đặt vào các đỉnh của hình đa giác đều có 2024 cạnh nội tiếp đường tròn (O) , mỗi đỉnh chỉ có một viên bi. Tính số các cách đặt 29 chiếc thẻ giống nhau vào trung điểm các cạnh của đa giác đã cho thỏa mãn tại mỗi trung điểm có nhiều nhất một chiếc thẻ và các viên bi đã cho được chia thành 29 phần, mà mỗi phần có ít nhất 9 viên bi (biết hai cách đặt thẻ được coi là như nhau nếu tồn tại một phép quay quanh tâm O biến cách chia này thành cách chia kia).