

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Cho hai dãy số $(x_n), (y_n), n = 1, 2, \dots$ được xác định như sau:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = (n+1)(x_{n+1} + x_n), y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Cho $a > 2$ là một số thực cho trước và dãy số $(u_n), n = 1, 2, \dots$ được xác định như sau:

$$u_1 = a, u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (4,0 điểm). Cho a, b, c, d là các số không âm thỏa mãn $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} = 3$ (*).

a) Chứng minh rằng $a + b + c + d \geq \frac{4}{3}$.

b) Tìm số thực m nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức $3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + \frac{4}{a+b+c+d} \leq m$ đúng với mọi bộ số không âm (a, b, c, d) thỏa mãn điều kiện (*).

Bài 3 (3,0 điểm). Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Ký hiệu $G(n)$ là ước nguyên tố lớn nhất của n .

a) Chứng minh rằng nếu $n+1$ là lũy thừa của 2, và n chia hết cho 11 thì $G(n) > 11$.

b) Hai số nguyên tố phân biệt p, q được gọi là *xa lạ* nếu không tồn tại số nguyên dương n lớn hơn 1 để hai tập hợp $\{p, q\}$ và $\{G(n), G(n+1)\}$ trùng nhau. Chứng minh rằng nếu $p < q$ là hai số nguyên tố lẻ sao cho $\text{ord}_p 2 = \text{ord}_q 2$ thì 2, p là hai số *xa lạ* và có vô hạn cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $p < q$ và hai số p, q là *xa lạ*.

Bài 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn và cân tại đỉnh A . Gọi D và E lần lượt là trung điểm của CB và CA , M là trung điểm của DE . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt cạnh AB tại điểm N . Tiếp tuyến tại M và N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt nhau tại P .

a) Đường thẳng AM cắt tiếp tuyến tại E của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM ở điểm Q . Chứng minh rằng P, D, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng điểm P nằm trên đường thẳng BC .

Bài 5 (3,0 điểm). Cho số nguyên dương $n > 1$, số nguyên dương k được gọi là n -good nếu với mọi cách tô màu mỗi số nguyên dương $1, 2, \dots, k$ bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ thì ta luôn chọn được n số cùng màu (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng của n số này cũng nằm trong tập hợp $\{1, 2, \dots, k\}$ và cùng màu với n số vừa chọn.

a) Tìm số 2-good nhỏ nhất.

b) Tìm số 2024-good nhỏ nhất.