SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THÁI NGUYÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC: 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (6,0 điểm).

a. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^3-4m\right)x+1$ đạt cực đại tại $x=0$.

b. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3+\left(7m^2-6m\right)x^2-m^4x-2m^2-8=0$ có nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 2 (5,0 điểm).

a. Có 30 tấm thẻ được đánh số lần lượt từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 2 tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số được đánh trên hai tấm thẻ chọn ra là một số chia hết cho 4.

b. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=5$ và $xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Câu 3 (5,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$.

a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b. Tính côsin của góc tạo bởi đường thẳng AB và mặt phẳng (SBC).

Câu 4 (2,0 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=\frac{2}{3}$ và

$$a_{n+1}=\frac{4}{3+4a_n-3a_n^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

a. Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số đó.

b. Đặt $x_n=\prod_{k=1}^{n}a_k, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số đó.

Câu 5 (2,0 điểm).

a. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho với mọi số nguyên x, y thì $3x^2+5xy+y^2-m$ không chia hết cho 13.

b. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mọi số nguyên dương m đều tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn $3x^2+5xy+y^2-m$ chia hết cho p.

-------- Hết --------

Họ và tên thí sinh:...Số báo danh:..................