SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HÀ NỘI**	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ **LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2023 - 2024**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN** Ngày thi: *30 tháng 9 năm 2023* Thời gian làm bài: *180 phút*

Câu I (*4,0 điểm*)

Cho hàm số $y=2x^3-3(2m-1)x^2-12mx$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực.

1) Khi $m=1$, viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm phân biệt M và N sao cho $ON=24OM$.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành.

Câu II (*3,0 điểm*)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+x}=y\left(\sqrt{y^2+1}+y\right) \\ \sqrt{2x^2-3y^2+7}+x=2\sqrt{3x-5}+3 \end{cases}$, với $x, y\in\mathbb{R}$.

Câu III (*3,0 điểm*)

Xét tập hợp S gồm tất cả các bộ số $(x; y; z)$ với x, y, z là các số nguyên dương không lớn hơn 30.

1) Hỏi có bao nhiêu bộ số $(x; y; z)$ thuộc tập hợp S thỏa mãn $x+y+z=5$?

2) Lấy ngẫu nhiên một bộ số $(a; b; c)$ từ tập hợp S. Tính xác suất để lấy được bộ số thỏa mãn $a+b+c<30$.

Câu IV (*4,0 điểm*)

Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $SA=3$ và tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng 4.

1) Tính số đo của góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

2) Cho điểm I xác định bởi $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Xét mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trung điểm của đoạn thẳng SI và cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm M, N, P (với M, N, P không trùng với S). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{4}{SM^2}+\dfrac{9}{SN^2}+\dfrac{16}{SP^2}$.

Câu V (*4,0 điểm*)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{\sqrt{11u_n+9}+3}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm.

2) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S_n=u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Câu VI (*2,0 điểm*)

Xét a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b=3(1-c)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc\left(a^2+b^2+9c^2\right)$.

--------- Hết ---------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Họ tên, chữ kí cán bộ coi thi thứ nhất: Họ tên, chữ kí cán bộ coi thi thứ hai:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

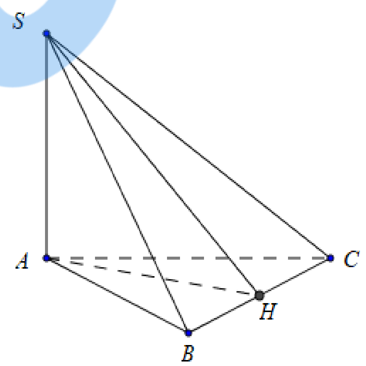
ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: *30 tháng 9 năm 2023*

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
I *(4 điểm)*	***Cho hàm số*** $y=2x^3-3(2m-1)x^2-12mx$ ***có đồ thị*** (C_m), ***với*** m ***là tham số thực…***	**4,0**
	1) Với $m=1$, ta có $y=2x^3-3x^2-12x$. Tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=6x^2-6x-12$.	0,25
	Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Do hai điểm M, N phân biệt, xét ΔOMN, ta được $$f'(x_0)=\frac{ON}{OM}=24 \text{ hoặc } f'(x_0)=-\frac{ON}{OM}=-24.$$	0,5
	TH1: $f'(x_0)=24 \Leftrightarrow 6x_0^2-6x_0-12=24 \Leftrightarrow x_0^2-x_0-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.	0,25
	+) Với $x_0=3$, suy ra $y_0=-9$, ta có PTTT: $y=24x-81$. +) Với $x_0=-2$, suy ra $y_0=-4$, ta có PTTT: $y=24x+44$.	0,5
	TH2: $f'(x_0)=-24 \Leftrightarrow 6x_0^2-6x_0-12=-24 \Leftrightarrow x_0^2-x_0+2=0$ (phương trình vô nghiệm). KL: Hai tiếp tuyến cần tìm là $y=24x-81$ và $y=24x+44$.	0,5
	2) Ta có $y'=6x^2-6(2m-1)x-12m$, suy ra $y'=0 \Leftrightarrow x^2-(2m-1)x-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2m \end{array}\right.$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq -\frac{1}{2}$.	0,5
	+) Với $x=-1$, ta có $y=6m+1$. +) Với $x=2m$, ta có $y=-8m^3-12m^2$.	0,5
	Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành thì $y_{CĐ}.y_{CT}<0 \Leftrightarrow -(8m^3+12m^2)(6m+1)<0 \Leftrightarrow 4m^2(2m+3)(6m+1)>0 \quad (*)$	0,5
	KL: Tập các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};+\infty\right)\setminus\{0\}$.	0,5
II *(3 điểm)*	***Giải hệ phương trình*** $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+x}=y\left(\sqrt{y^2+1}+y\right) & (1) \\ \sqrt{2x^2-3y^2+7}+x=2\sqrt{3x-5}+3 & (2) \end{cases}$ …	**3,0**
	Điều kiện $\begin{cases} x^2+x\geq 0 \\ y^2+1\geq 0 \\ 2x^2-3y^2+7\geq 0 \\ 3x-5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3y^2+7\geq 0 \\ x\geq \frac{5}{3} \end{cases}$.	0,25
	Từ phương trình (1), do VT(1) dương nên $y>0$. PT(1) $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+x}=y\left(\sqrt{y^2+1}+y\right) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+x}=y^2+\sqrt{y^4+y^2}$.	0,5
	Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+t}, t>0$. Ta có $f'(t)=1+\frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}>0, \forall t>0$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.	0,5

	Ta được $y^2=x,$ phương trình (2) trở thành $\sqrt{2x^2-3x+7}+x=2\sqrt{3x-5}+3$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2-3x+7}-(x+1)\right)+2\left(x-1-\sqrt{3x-5}\right)=0$ $\Leftrightarrow\left(x^2-5x+6\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+7}+x+1}+\frac{2}{x-1+\sqrt{3x-5}}\right)=0.$ TH1: $x^2-5x+6=0$ nên $x=2;x=3.$	0,5
	TH2 : Đánh giá được từ $x\geq\frac{5}{3}$ nên $\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+7}+x+1}+\frac{2}{x-1+\sqrt{3x-5}}>0.$	0,5
	KL: Nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(2;\sqrt{2}\right)$ và $(x;y)=\left(3;\sqrt{3}\right).$	0,5
III *(3 điểm)*	***Xét tập hợp S gồm tất cả các bộ số $(x;\ y;\ z)$ với $x,\ y,\ z$ là các số nguyên dương…***	**3,0**
	1) Có 6 bộ số thỏa mãn đề bài là $(1;2;2);(2;1;2);(2;2;1)$	0,75
	và $(1;1;3);(1;3;1);(3;1;1).$	0,75
	2) Không gian mẫu có số phần tử là $30^3=27000.$	0,5
	Do $a+b+c<30$ nên tồn tại $d\in\mathbb{N}^*$ sao cho $a+b+c+d=30.$ Suy ra số bộ $(a;\ b;\ c)$ thỏa mãn đề bài là $C_{29}^3.$	0,5
	Xác suất cần tìm bằng $\frac{C_{29}^3}{27000}.$	0,5
IV *(4 điểm)*	***Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=3$...***	**4,0**
	1) Gọi H là trung điểm BC, ta có $SH\perp BC, AH\perp BC.$	0,5
	Suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SHA}.$	0,5
	Vì ΔSBC đều, có cạnh bằng 4 nên $SH=2\sqrt{3}.$ Ta có $\sin\widehat{SHA}=\frac{SA}{SH}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{SHA}=60^\circ.$ Vậy $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=60^\circ.$ 	0,5
	2) Đặt $\frac{2}{SM}=x,\ \frac{3}{SN}=y,\ \frac{4}{SP}=z$ với $x,y,z>0.$ Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng $SI.$ Ta có $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 18\overrightarrow{SO}=2\overrightarrow{SA}+3\overrightarrow{SB}+4\overrightarrow{SC}=2\frac{SA}{SM}\overrightarrow{SM}+3\frac{SB}{SN}\overrightarrow{SN}+4\frac{SC}{SP}\overrightarrow{SP}$ $\Leftrightarrow 18\overrightarrow{SO}=3x\overrightarrow{SM}+4y\overrightarrow{SN}+4z\overrightarrow{SP}.$ Vì bốn điểm $M,\ N,\ P,\ O$ đồng phẳng và các vectơ $\overrightarrow{SM},\ \overrightarrow{SN},\ \overrightarrow{SP}$ không đồng phẳng nên $3x+4y+4z=18.$	0,5
	Khi đó $T=\frac{4}{SM^2}+\frac{9}{SN^2}+\frac{16}{SP^2}=x^2+y^2+z^2.$	0,5
	Do $T=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(3^2+4^2+4^2\right)}{3^2+4^2+4^2}\geq\frac{(3x+4y+4z)^2}{41}.$	0,5
	Suy ra $T=\frac{4}{SM^2}+\frac{9}{SN^2}+\frac{16}{SP^2}\geq\frac{324}{41}.$	0,5
	Vậy GTNN của T bằng $\frac{324}{41}$ khi $x=\frac{54}{41},y=\frac{72}{41},z=\frac{72}{41}.$	0,5

	Cho dãy số (u_n) ***xác định bởi*** $u_1=1$ ***và*** $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{\sqrt{11u_n+9}+3}$ ***với mọi*** $n\in\mathbb{N}^*$...	**4,0**
	1) Chứng minh dãy số (u_n) là dãy số dương: Có $u_1=1$. Giả sử $u_n>0$ đúng đến $n=k$ với $k\geq 1$.	0,5
	Khi đó $u_{k+1}=\dfrac{6u_k}{\sqrt{11u_k+9}+3}>0$. Theo nguyên lý quy nạp, suy ra (u_n) là dãy số dương.	0,5
	Xét $u_{n+1}-u_n=\dfrac{6u_n}{\sqrt{11u_n+9}+3}-u_n$. Nhận xét được $\sqrt{11u_n+9}+3>6,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,5
V *(4 điểm)*	Suy ra $\dfrac{6u_n}{\sqrt{11u_n+9}+3}-u_n<0$ nên $u_{n+1}-u_n<0, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.	0,5
	2) Ta có $u_{n+1}=\dfrac{6u_n\left(\sqrt{11u_n+9}-3\right)}{11u_n}=\dfrac{6\left(\sqrt{11u_n+9}-3\right)}{11}$.	0,5
	Suy ra $11u_{n+1}=6\left(\sqrt{11u_n+9}-3\right)\Leftrightarrow u_{n+1}^2=\dfrac{396}{121}(u_n-u_{n+1})$.	0,5
	Nên $S_n=u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2=1+\dfrac{396}{121}(u_1-u_2+u_2-u_3+\cdots+u_{n-1}-u_n)=1+\dfrac{396}{121}-\dfrac{396}{121}u_n$ với $n\geq 2$.	0,5
	Ta có dãy số (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn. Gọi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$, chứng minh được $a=0$.	0,25
	Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1+\dfrac{396}{121}=\dfrac{47}{11}$.	0,25
	Tìm GTLN của $P=abc\left(a^2+b^2+9c^2\right)$.	**2,0**
	Đặt $z=3c$, ta được $a+b+z=3$ và $3P=abz\left(a^2+b^2+z^2\right)$. Ta có $3P=abz\left(a^2+b^2+z^2\right)=abz\left(a^2+b^2\right)+abz^3=\dfrac{1}{2}z.2ab\left[(a+b)^2-2ab\right]+abz^3$.	0,25
	$\leq\dfrac{1}{2}z\dfrac{(a+b)^4}{4}+\dfrac{(a+b)^2}{4}z^3=\dfrac{1}{8}(3-t)t^4+\dfrac{t^2(3-t)^3}{4}\cdot$ Với $t=a+b$. Do vai trò $a,\ b,\ z$ như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $z=\min\{a,b,z\}$. Do đó $z\leq 1$ nên $a+b\geq 2$ hay $t\geq 2$.	0,25
VI *(2 điểm)*	Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{8}(3-t)t^4+\dfrac{t^2(3-t)^3}{4}$ với $t\geq 2$. Ta có $f(t)-3=\dfrac{1}{8}(3-t)t^4+\dfrac{t^2(3-t)^3}{4}-3=-\dfrac{3}{8}(t-2)^2\left[t(t-1)(t-2)+2\right]\leq 0,\ \forall t\geq 2$. Vậy $f(t)\leq 3,\ \forall t\geq 2$.	0,5
	Suy ra $\max\limits_{[2;+\infty)}f(t)=3$ khi $t=2$.	0,5
	Do đó GTLN của biểu thức P bằng 1 khi $a=b=z=1$ (hay $a=b=1;\ c=\dfrac{1}{3}$).	0,5

Chú ý: *Học sinh làm theo cách khác nhưng đúng vẫn cho điểm tối đa.*
Điểm thành phần chi tiết đến 0,25. Giám khảo không được làm tròn tổng điểm.