

[Đáp Án] Đề Thi Chọn Học Sinh Giỏi Lớp 9 Tỉnh Phú Thọ 2013 - 2014

1. a) Giải phương trình trên tập số nguyên

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0.$$

b) Cho $P(x) = x^3 - 3x^2 + 14x - 2$. Tìm số các số tự nhiên x nhỏ hơn 100 mà $P(x)$ chia hết cho 11.

2. a) Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$$

biết $a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}$.

b) Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mã

$$\begin{cases} x^3 = 3x - 1 \\ y^3 = 3y - 1 \\ z^3 = 3z - 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

3. a) Giải phương trình

$$3x - 1 + \frac{x - 1}{4x} = \sqrt{3x + 1}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases} = 0$$

4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC . Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm A và có số đo bằng α không đổi sao

cho E, F khác phía với điểm A so với BC ; AF và AE cắt đường thẳng BC lần lượt tại M và N . Lấy điểm D sao cho tứ giác $MNED$ là hình bình hành.

a) Chứng minh $MNEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF . Chứng minh rằng khi góc nội tiếp \widehat{EAF} quay quanh điểm A thì I chuyển động trên một đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha = 60^\circ$ và $BC = R$, tính theo R độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng OI .

5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} + \frac{2y^2 + z^2 + x^2}{4 - zx} + \frac{2z^2 + x^2 + y^2}{4 - xy} \geq 4xyz.$$