

[Đáp Án] Đề Thi Chọn Học Sinh Giỏi Lớp 9 Tỉnh Phú Thọ 2014-2015

---

1. a) Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 - xy = x + y + 2.$$

b) Chứng minh rằng với ba số tự nhiên  $a, b, c$  trong đó có đúng một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có

$$(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (a - b + c)^3$$

chia hết cho 96.

2. a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

b) Tính tổng

$$S = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016}\right)^2}.$$

3. a) Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 - x} = 2x - x^2.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2 - 1)y + (y^2 - 1)x = 2(xy - 1) \\ 4x^2 + y^2 + 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

4. Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O; R)$  ( $BC < 2R$ ),  $A$  là điểm di động trên cung lớn  $BC$  ( $A$  không trùng  $B, C$ ). Gọi  $AD, BE, CF$  là các đường cao của tam giác  $ABC$ ;  $EF$  cắt  $BC$  tại  $P$ , qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $EF$  cắt  $AC$  tại  $Q$  và cắt  $AB$  tại  $R$ .

a) Chứng minh tứ giác  $BQCR$  là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Chứng minh hai tam giác  $EPM$  và  $DEM$  là hai tam giác đồng dạng.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $PQR$  luôn đi qua một điểm cố định.

5. Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt[3]{yz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xy}} \geq xy + yz + xz.$$