

[Đáp Án] Đề Thi Chọn Học Sinh Giỏi Lớp 9 Tỉnh Phú Thọ 2016-2017

---

1. a) Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0.$$

b) Chứng minh rằng nếu  $ab = 3$  thì hai phương trình

$$(a^3 + a)x + a^2y + a^4 + 1 = 0, \quad (b^3 + b)x + b^2y + b^4 + 1 = 0$$

(với  $a, b$  là các tham số) không có nghiệm nguyên chung.

2. a) Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x^2y = 3x^2 + 5xy + y^2 + 4x + y \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y+1} = x + 1 \end{cases}$$

3. Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  cố định trên  $(O; R)$ , Gọi  $M, N$  là các giao điểm của hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(A; R)$ ;  $H$  là điểm thay đổi trên cung nhỏ  $MN$  của đường tròn  $(A; R)$ . Đường thẳng qua  $H$  và vuông góc với  $AH$  cắt  $(O; R)$  tại  $B, C$ . Kẻ  $HI \perp AB$  ( $I \in AB$ ),  $HK \perp AC$  ( $K \in AC$ ).

a) Chứng minh rằng  $IK$  luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và  $AB \cdot AC = 2R^2$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích  $\triangle AIK$  khi  $H$  thay đổi.

4. Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(a^2b + b^2c + c^2a) + (a^2 + b^2 + c^2) + 4abc.$$