

Đề Thi Chọn Học Sinh Giỏi Lớp 9 Tỉnh Phú Thọ 2022-2023

1. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$3(x^2 + y^2) + 2(xy - 1) = 662.$$

b) Cho các số nguyên dương a, b, m, n thỏa mãn $(a, b) = 1$ và $\frac{m^2 + n^2}{a} = \frac{mn}{b}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}$ là số nguyên.

2. a) Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{x^{10}}{a^5} + \frac{y^{10}}{b^5} = \frac{2}{(a+b)^5}.$$

b) Giải phương trình

$$(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3} = 5x^2+4x-5.$$

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3}+1) \\ \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt[3]{y+5} = y^2+x-6 \end{cases}$$

3. Cho tam giác ABC cân tại A ($BAC < 90^\circ$). Một đường tròn tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại B, C . Trên cung BC nằm trong tam giác ABC lấy điểm M (M khác B, C). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MB và IK , Q là giao điểm của hai đường thẳng MC và IH , T là giao điểm của hai đường thẳng HK và MI .

- a) Chứng minh $TK \cdot MH = MK \cdot TH$.
- b) Chứng minh PQ song song với BC .
- c) Gọi (O_1) và (O_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác MPK và MQH , N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) (N khác M). Chứng minh khi M di động trên cung nhỏ BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.
4. Cho x, y, z, t là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{x}{2023\sqrt{2023} + yzt} + \frac{y}{2023\sqrt{2023} + xzt} + \frac{z}{2023\sqrt{2023} + txy} + \frac{t}{2023\sqrt{2023} + xyz}.$$