

Câu 1. (4.0 điểm)

a, Biết n là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng n^2 cũng là tổng của hai số chính phương.

b, Cho biểu thức $P = \left(\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right) : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

1, Nêu điều kiện xác định và rút gọn P

2, Tìm số nguyên m nhỏ nhất để $P < m$ với mọi a

Câu 2. (3.0 điểm)

a, Chứng minh rằng : $11^{100} - 1$ chia hết cho 1000

b, Biết đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $x-2$ dư 7, chia cho đa thức x^2+1 dư $3x+5$. Tìm dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $(x^2+1)(x-2)$

Câu 3 (4.0 điểm)

a, Giải các phương trình sau

1, $2x^4 - x^3 - 7x^2 + 3x + 3 = 0$

2, $(1 + \frac{1}{x})^3(1 + x^3) = 16$

b, Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} + \frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} + \frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} + \frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

Câu 4 (7.0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E.

a, Chứng minh rằng tam giác BEC đồng dạng với tam giác ADC

b, Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng $BM \cdot BE = BC \cdot BH$. Tính số đo góc AHM

c, Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh rằng $GB \cdot AH + GB \cdot HC = BC \cdot HD$

Câu 5 (2.0 điểm)

Cho x, y là hai số thỏa mãn
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1939 \\ (x+y)(x+1)(y+1) = 2020 \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức $M = x + y$