UBND THÀNH PHỐ BẮC NINH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2021-2022
Môn: **Toán - Lớp 8**
Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x^2}\right):\dfrac{x-2}{x^2-1}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên. Với $x>2$, tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Cho các số a,b,c khác 0; $a+b=c+\dfrac{1}{2021}$; $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+2021$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\left(a^{2021}+b^{2021}-c^{2021}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}-\dfrac{1}{c^{2021}}\right)$.

2) Giải phương trình $\left(x^2+1\right)^2+3x\left(x^2+1\right)+2x^2=0$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho hai số nguyên a,b thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $a-b$ là số nguyên chẵn và $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5. Chứng minh a^2-b^2 chia hết cho 20.

2) Cho đa thức $f(x)=x^2-4$. Giả sử đa thức $P(x)=x^5+ax^2+b$ có 5 nghiệm là $x_1;x_2;x_3;x_4;x_5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=f(x_1).f(x_2).f(x_3).f(x_4).f(x_5)$.

3) Tìm các số tự nhiên x,y,z khác 0 thỏa mãn $(x-1)^3+y^3-2z^3=0$ và $x+y+z-1$ là số nguyên tố.

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, lấy M trên đoạn OC, không trùng O. Gọi S là điểm đối xứng với B qua M, đường thẳng BS cắt CD tại L. Gọi E là giao điểm của DM với BC; F là giao điểm của AE và CD, G là giao điểm của DE và BF. Gọi I và K theo thứ tự là giao điểm của AB và CG và DG. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{SL}{BL}=\dfrac{DS}{BD}$.

b) IE song song với BD.

c) AE vuông góc với CG.

d) $DL.BS\geq BD.DS$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho 40 số nguyên dương $a_1;a_2;\ldots;a_{19}$ và $b_1;b_2;\ldots;b_{21}$ thỏa mãn các điều kiện: $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_{19}\leq 200$, $1\leq b_1<b_2<\cdots<b_{21}\leq 200$. Chứng minh rằng tồn tại bốn số $a_i;a_j;b_k;b_p$ $(1\leq i,j\leq 19; 1\leq k,p\leq 21)$ sao cho $a_i<a_j, b_k<b_p$ và $a_j-a_i=b_p-b_k$.

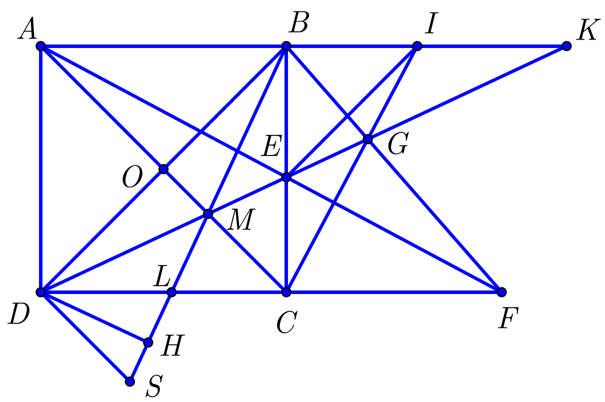
---------- **HẾT** ----------

UBND THÀNH PHỐ BẮC NINH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

(Hướng dẫn có 01 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2021-2022
Môn: **Toán - Lớp 8**

Câu	Đáp án	Điểm
1.a. (2,0 điểm)		
	ĐK: $x \neq \pm 1; x \neq 2$. $P=\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^2}\right):\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{x(1-x)-(1+x)+1}{1-x^2}\cdot\frac{x^2-1}{x-2}$	1,0
	$=\frac{-x^2}{1-x^2}\cdot\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{x^2}{x-2}$. Vậy $P=\frac{x^2}{x-2}$.	1,0
1.b. (2,0 điểm)		
	$P=\frac{x^2}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2}$ Vì x nguyên nên để P nguyên thì $x-2$ là $Ư(4)=\{\pm1;\pm2;\pm4\}$. Hay $x\in\{1;3;0;4;-2;6\}$ (thỏa mãn).	1,0
	Ta lại có $P=\frac{x^2}{x-2}=\frac{(x^2-8x+16)+(8x-16)}{x-2}=\frac{(x-4)^2}{x-2}+8\geq 8$ với mọi $x>2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8 khi và chỉ khi $x=4$.	1,0
2.1. (2,0 điểm)		
	$a+b-c=\frac{1}{2021}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=2021\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b-c}$ $\Rightarrow\frac{a+b}{ab}-\frac{a+b-c+c}{c(a+b-c)}=0\Rightarrow(a+b)\frac{ac+bc-c^2-ab}{abc(a+b-c)}=0$ $\Rightarrow(a+b)(b-c)(a-c)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0\\ b-c=0\\ a-c=0\end{array}\right.$	1,0
	Nếu $a+b=0$ thì $A=1$. Tương tự với hai trường hợp còn lại có $A=1$. Vậy $A=1$.	1,0
2.2. (2,0 điểm)		
	$(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2=0\Leftrightarrow\left[(x^2+1)^2+x(x^2+1)\right]+\left[2x(x^2+1)+2x^2\right]=0$ $\Leftrightarrow(x^2+1)(x^2+1+x)+2x(x^2+1+x)=0\Leftrightarrow(x^2+x+1)(x^2+2x+1)=0$	1,0
	Với $x^2+x+1=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ (vô nghiệm). Với $x^2+2x+1=0\Leftrightarrow(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$.	1,0

3.1. (1,0 điểm)		
	Vì $a-b$ là số chẵn nên $a+b$ chẵn suy ra $a^2-b^2 \vdots 4$ (1) Vì $4a^2+3ab-11b^2 \vdots 5$ và $5a^2+5ab-10b^2 \vdots 5$	0,5
	$\Rightarrow (5a^2+5ab-10b^2)-(4a^2+3ab-11b^2) \vdots 5$ hay $(a+b)^2 \vdots 5 \Rightarrow a+b \vdots 5 \Rightarrow a^2-b^2 \vdots 5$ (2) Do $(4;5)=1$ nên từ (1) và (2) suy ra $a^2-b^2 \vdots 20$.	0,5
3.2. (2,0 điểm)		
	Vì đa thức $P(x)=x^5+ax^2+b$ có 5 nghiệm là $x_1;x_2;x_3;x_4;x_5$ Nên $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$ Ta có $f(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$ nên $A=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$ $=(x_1-2)(x_1+2)(x_2-2)(x_2+2)(x_3-2)(x_3+2)(x_4-2)(x_4+2)(x_5-2)(x_5+2)$	1,0
	$=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)(2-x_4)(2-x_5)(2+x_1)(2+x_2)(2+x_3)(2+x_4)(2+x_5)$ $=P(2)\cdot P(-2)=(32+4a+b)(-32+4a+b)=(4a+b)^2-1024 \geq -1024$ $\Rightarrow f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5) \geq -1024$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $4a+b=0$	1,0
3.3. (1,0 điểm)		
	$(x-1)^3+y^3-2z^3=0$ (*) $\Rightarrow (x-1)^3+y^3+z^3=3z^3 \vdots 3$ (1) Ta có $(x-1)^3+y^3+z^3-(x+y+z-1)=\left[(x-1)^3-(x-1)\right]+(y^3-y)+(z^3-z) \vdots 3$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $(x+y+z-1) \vdots 3$ mà $x+y+z-1$ là số nguyên tố nên $x+y+z-1=3 \Rightarrow x+y+z=4$	0,5
	TH1: $x=2, y=z=1$ thỏa mãn (*). TH2: $x=y=1; z=2$ không thỏa mãn (*). TH3: $x=z=1; y=2$ không thỏa mãn (*). Vậy $x=2, y=z=1$.	0,5
4.a (2,0 điểm)		
	 Do O là trung điểm của BD, M là trung điểm của SB nên OM là đường trung bình của tam giác $BDS \Rightarrow OM // DS$.	1,0
	Mà $OM \perp BD \Rightarrow DS \perp BD \Rightarrow$ Tam giác BDS vuông tại D. Mà g $BDL=45^\circ$ nên DL là phân giác của tam giác $BDL \Rightarrow \dfrac{SL}{BL}=\dfrac{DS}{BD}$.	1,0

4.b (3,0 điểm)		
	Ta sẽ chứng minh $\frac{IK}{IB}=\frac{KE}{ED}$. Do $BK//DF$ nên theo định lí Ta-lét, ta có: $\frac{IK}{CD}=\frac{IG}{GC}=\frac{IB}{CF}$ suy ra $\frac{IK}{IB}=\frac{CD}{CF}$ (1)	1,5
	Cũng theo định lí Ta-lét với $AK//DF$, ta có: $\frac{KE}{ED}=\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CF}$ (2) Ta lại có $AB=CD$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{IK}{IB}=\frac{KE}{ED}$. Theo định lí đảo Ta-lét ta có $IE//BD$.	1,5
4.c. (1,0 điểm)		
	Ta có $BD\perp AC$ và $IE//BD$ nên $IE\perp AC$. Tam giác ACI có $CB\perp AI, IE\perp AC$ nên E là trực tâm của tam giác ACI. Suy ra $AE\perp CG$.	1,0
4.d (1,0 điểm)		
	Kẻ DH vuông góc BS tại H. Ta có $2.S_{BDS}=BD.DS=BS.DH$ (1) Lại có $DL\geq DH$ (quan hệ đường xiên, đường vuông góc) $\Rightarrow BS.DL\geq BS.DH$ (2) Từ 1 và 2 suy ra $DL.BS\geq BD.DS$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M trùng C.	1,0
5. (1,0 điểm)		
	Xét các tổng có dạng: a_m+b_n với $m\in\{1;2;\ldots;19\}$ và $n\in\{1;2;\ldots;21\}$ Ta thấy có $19.21=399$ tổng như vậy và mỗi tổng nhận giá trị nguyên từ 2 đến 400 (có 399 giá trị). TH1: Trong 399 tổng trên không có 2 tổng nào bằng nhau thì 399 tổng này sẽ nhận đủ các giá trị từ 2 đến 400. Suy ra tổng nhỏ nhất bằng 2 và tổng lớn nhất là 400.	0,5
	Khi đó $a_1+b_1=2$ và $a_{19}+b_{21}=400$ suy ra $a_1=b_1=1$ và $a_{19}=b_{21}=200$ $a_{19}-a_1=b_{21}-b_1$(1) TH2: Các tổng trên có ít nhất 2 tổng bằng nhau giả sử là: a_i+b_k và a_i+b_p $a_j+b_k=a_i+b_p\Rightarrow a_j-a_i=b_p-b_k$ (2) Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.	0,5

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của học sinh ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----------Hết-----------