

**Câu 1 (3,0 điểm)**

1. Phân tích đa thức thành nhân tử:  $xy(x^2 + y^2) + 2 - (x + y)^2$
2. Cho  $n \in \mathbb{Z}$ , chứng minh  $n^5 - n$  chia hết cho 5

**Câu 2 (4,0 điểm)**

Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn P
2. Tìm x để  $2P = -1$
3. Chứng minh khi  $x > 1$  thì  $P \geq 4$

**Câu 3 (4,0 điểm)**

1. Tìm x, y nguyên thỏa mãn :  $4x^2 - 9y^2 + 4x - 12y - 24 = 0$

2. Giải phương trình:  $\frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} = 6$

**Câu 4 (2,0 điểm)**

Tìm a, b để đa thức  $A(x) = x^4 - 5x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức  $B(x) = x^2 - 5x + 8$

**Câu 5 (6,0 điểm)**

Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ) có AD là phân giác, M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC, E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

1. Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông và  $AB \cdot DC = AC \cdot BD$
2. Chứng minh  $EF \parallel BC$
3. Gọi H là giao điểm của BN và CM chứng minh  $\triangle ANB$  đồng dạng với  $\triangle NFA$  và H là trực tâm của  $\triangle AEF$

**Câu 6 (1,0 điểm)**

Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $32x^6 + 4y^3 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{(2x^2 + y + 2021)^3}{2022(x^2 + y^2) - 2022(x + y) + 3033}$$

----- Hết -----

Họ và tên học sinh: .....Số báo danh .....

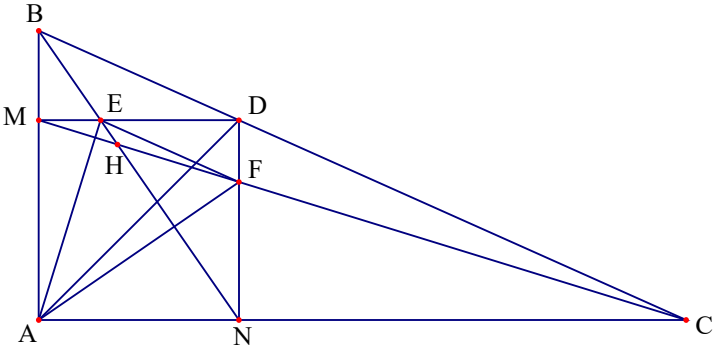
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ KHẢO SÁT NĂNG LỰC HỌC SINH

NĂM HỌC 2021-2022 MÔN TOÁN 8

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1	Ý 1 1.5đ	$xy(x^2 + y^2) + 2 - (x + y)^2$	0.5 0.5 0.5
		$= xy(x^2 + y^2) + 2 - (x^2 + y^2) - 2xy$	
		$= (x^2 + y^2)(xy - 1) - 2(xy - 1)$ $= (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2)$	
	Ý 2 1.5đ	2n ∈ Z, CMR: n <sup>5</sup> - n chia hết cho 5 Ta có: n <sup>5</sup> - n	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
		$= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$	
		$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5)$	
		$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4) + 5n(n - 1)(n + 1)$	
		$= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1)$	
		Nhận thấy: */ n - 2; n - 1; n; n + 1; n + 2 là 5 số tự nhiên liên tiếp nên tích chúng chia hết cho 5.	
		*/ 5n(n - 1)(n + 1) ÷ 5 ⇒ đpcm.	
Câu 2	Ý 1 4 đ	ĐKXĐ : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$	0.5
		$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left( \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$	0.5
	2 đ	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$	0.5
			0.25

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
		$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$ <p>Kết luận</p>	0.25
	Ý 2	$2P = -1 \Leftrightarrow P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \text{ với } x \in \text{ĐKXD}$ $\Rightarrow 2x^2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$	0.25
	1 đ	$\Leftrightarrow 2x^2+2x-x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)=0$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ( TM ĐKXD) } \text{ Hoặc } x = -1 \text{ ( không TM ĐKXD)}$ <p>(Nếu không loại x= -1 trừ 0,25 điểm)</p>	0.25
		Vậy $2P = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$	0.25
	Ý 3	$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ $P = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$	0.5
	1 đ	<p>Vì <math>x &gt; 1</math> nên <math>x-1 &gt; 0</math> và <math>\frac{1}{x-1} &gt; 0</math>. Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số dương <math>x-1</math> và <math>\frac{1}{x-1}</math> ta có:</p>	0.25
		$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 4 \Leftrightarrow P \geq 4$	0.25
		Vậy khi $x > 1$ thì $P \geq 4$	
Câu 3	Ý a	Ta có $4x^2 - 9y^2 + 4x - 12y - 24 = 0$	0.25
	2 đ	$\Leftrightarrow (4x^2 + 4x + 1) - (9y^2 + 12y + 4) - 21 = 0$	0.25
	4 đ	$\Leftrightarrow (2x+1)^2 - (3y+2)^2 = 21$ $\Leftrightarrow (2x+3y+3)(2x-3y-1) = 21$	0.25
		Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2x + 3y + 3$ và $2x - 3y - 1$ là các số	0.25



Bài	Ý	Nội dung	Điểm
		Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$	
Câu 4 2 đ		HS đặt phép chia hoặc phân tích viết được $A(x) = B(x)(x^2 - 8) + (a - 40)x + b + 64$	0.75
		$A(x) : B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 40 = 0 \\ b + 64 = 0 \end{cases}$	0.75
		$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 40 \\ b = -64 \end{cases}$	0.25
		Vậy $a = 40; b = -64$ .	0.25
Câu 5 6 đ			0.5
	Ý 1	Chứng minh $\widehat{AMD} = 90^\circ; \widehat{AND} = 90^\circ$ $\widehat{MAN} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác AMDN là hình chữ nhật	1.0
	2.0 đ	Hình chữ nhật AMDN có AD là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên tứ giác AMDN là hình vuông Tam giác ABC có AD là phân giác nên $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot BD$	0.25 0.75
	Ý 2	Chứng minh $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)	0.5
	2 đ		0.5

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
		<p>Chứng minh <math>\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}</math> (2)</p> <p>Chứng minh <math>AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}</math> (3)</p> <p>Chứng minh <math>\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}</math> (4)</p> <p>Từ (1); (2); (3); (4) <math>\Rightarrow \frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC}</math></p> <p><math>\Rightarrow EF \parallel DC</math> (định lý Ta-let đảo) <math>\Rightarrow EF \parallel BC</math></p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
	Ý 3 1.5đ	<p>Chứng minh <math>AN = DN \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}</math> (5)</p> <p>Chứng minh <math>\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}</math> (6)</p> <p>Chứng minh <math>\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}</math> (7)</p> <p>Chứng minh <math>AM = AN \Rightarrow \frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}</math> (8)</p> <p>Từ (5); (6); (7); (8) <math>\Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN}</math></p> <p><math>\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta NFA</math> (cgc)</p> <p>* Chứng minh H là trực tâm <math>\Delta AEF</math>          Vì <math>\Delta ANB \sim \Delta NFA</math> nên <math>\widehat{NBA} = \widehat{FAN}</math>          mà <math>\widehat{BAF} + \widehat{FAN} = 90^\circ</math>  <math>\Rightarrow \widehat{NBA} + \widehat{BAF} = 90^\circ</math>  <math>\Rightarrow EH \perp AF</math> (9)</p> <p>Tương tự <math>FH \perp AE</math> (10)</p> <p>Từ (9); (10) <math>\Rightarrow H</math> là trực tâm của tam giác AEF</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
Câu 6 1đ		<p>CM: Mệnh đề phụ như sau:</p> <p>Với <math>A, B &gt; 0</math>.</p>	

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
		<p>Ta có <math>4(A^3 + B^3) \geq (A + B)^3</math> (*)</p> <p>(*) <math>\Leftrightarrow 4(A^2 - AB + B^2) \geq (A + B)^2</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 4A^2 - 4AB + 4B^2 - A^2 - 2AB - B^2 \geq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 3A^2 - 6AB + 3B^2 \geq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 3(A - B)^2 \geq 0</math> (Luôn đúng)</p>	0.25
		<p>Áp dụng ta có : <math>1 = 32x^6 + 4y^3 = 4(8x^6 + y^3) \geq (2x^2 + y)^3</math></p> <p><math>\Rightarrow 2x^2 + y \leq 1</math></p> <p>Lại có <math>2022(x^2 + y^2) - 2022(x + y) + 3033</math></p> <p><math>= 2022(x - \frac{1}{2})^2 + 2022(y - \frac{1}{2})^2 + 2022 \geq 2022</math></p>	0.25
		<p><math>A \leq \frac{(1 + 2021)^3}{2022} = 2022^2</math></p>	0.25
		<p>Dấu bằng xảy ra <math>\Leftrightarrow x = y = 0,5</math></p> <p>Vậy <math>A_{\max} = 2022^2</math> tại <math>x = y = 0,5</math></p>	0.25

Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa

Bài hình phải có hình vẽ đúng và phù hợp với chứng minh thì mới cho điểm

Điểm toàn bài là tổng các điểm thành phần không làm tròn