

**ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8  
NĂM HỌC 2021 - 2022**

**Môn: Toán** – (Thời gian làm bài 120 phút)

**Bài 1. (4.0 điểm)**

Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

- Rút gọn biểu thức P.
- Tìm x để  $P.(x-1) = 6x - 5$

**Bài 2. (6.0 điểm)**

a) Giải phương trình:  $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Không thực hiện phép tính, chứng minh rằng:  $\frac{2022^3 + 22^3}{2022^3 + 2000^3} = \frac{2022 + 22}{2022 + 2000}$

c) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn  $a^3 + b^3 = 5c^3 + 11d^3$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c + d : 6$ .

**Bài 3. (3.0 điểm)**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

b) Cho a, b, c > 0.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$

**Bài 4. (6.0 điểm)**

Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ), đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BH, CH. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại F. Gọi O là giao điểm của AH và DE.

a) Chứng minh rằng:  $AH^2 = BH.CH$  và  $AD.AB = AE.AC$

b) Giả sử BC cố định, A di động nhưng vẫn thỏa mãn  $\angle BAC = 90^\circ$ . Chứng minh rằng, đường thẳng đi qua O và vuông góc với AF luôn đi qua 1 điểm cố định.

c) Chứng minh rằng, trực tâm của tam giác AMN là trung điểm của OH.

**Bài 5. (1.0 điểm)**

Chứng minh rằng, trong 29 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 100 ta luôn chọn được 2 số có ước chung lớn nhất khác 1.

-----Hết-----

## HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 8

### I. Hướng dẫn chung:

1) Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với các ý cơ bản học sinh phải trình bày, nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì vẫn cho điểm tối đa.

2) Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu và không làm tròn.

### II. Đáp án và thang điểm:

Bài	Ý	Nội dung trình bày	Điểm	
1 (4,0đ)	a	ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$ (Sai 1 điều kiện tính 0,25đ)	0,5	
		$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left( \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$	0,5	
		$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$	0,5	
		$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1}$	0,5	
		$P = \frac{x^2}{x-1}$	0,5	
	b	Ta có: $P(x-1) = 6x - 5$ $\frac{x^2}{x-1} \cdot (x-1) = 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$	0,5	
		$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$	0,5	
		$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$ Đối chiếu điều kiện xác định ta được $x = 5$ Vậy $x = 5$	0,5	
	2 (6,0đ)	a	ĐKXD: $x \notin \{-4; -5; -6; -7\}$	0,25
			Biến đổi phương trình thành: $\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$	0,25
$\Rightarrow \left( \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} \right) + \left( \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} \right) + \left( \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} \right) = \frac{1}{18}$			0,5	
$\Rightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$			0,25	
$\Rightarrow (x+4)(x+7) = 54$			0,25	
$\Rightarrow (x+13)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x = -13 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$ Vậy nghiệm của phương trình: $S = \{-13; 2\}$			0,5	
b			Đặt $2022 = a, 22 = b, 2000 = c$ . Ta có $a = b + c$	0,25
		Xét về phải đẳng thức ta có:	0,5	

		$\frac{2022^3 + 22^3}{2022^3 + 2000^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a+c)(a^2 - ac + c^2)}$	
		Thay $a = b + c$ vào $a^2 - ab + b^2 = (b+c)^2 - (b+c)b + b^2 = b^2 + bc + c^2$	0,25
		$a^2 - ac + c^2 = (b+c)^2 - (b+c)c + c^2 = b^2 + bc + c^2$	0,25
		Nên $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ac + c^2$ .	0,25
		$\Rightarrow \frac{2022^3 + 22^3}{2022^3 + 2000^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3}$ $= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a+c)(a^2 - ac + c^2)} = \frac{a+b}{a+c} = \frac{2022+22}{2022+2000}$	0,5
		Vậy ta có đpcm	
	c	$a^3 + b^3 = 5c^3 + 11d^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6c^3 + 12d^3$	0,25
		$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 6$	0,25
		Xét hiệu : $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d)$	
		$= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$	0,25
		$= a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1) + d(d-1)(d+1)$	0,25
		Với $a$ nguyên thì $a, a-1, a+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên tích $a(a-1)(a+1) : 6$	0,25
		Tương tự : $b(b-1)(b+1) : 6, c(c-1)(c+1) : 6, d(d-1)(d+1) : 6$	0,25
		Khi đó : $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d) : 6$	0,25
		Mà $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 6$ nên $a + b + c + d : 6$	0,25
3 (3,0đ)	a	Ta có:	
		$A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 - 8x - 2y + 18$	0,5
		$A = 2[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$	0,5
		$A = 2(x+y-2)^2 + (y+3)^2 + 1$	0,5
		Chúng minh được $A \geq 1$	0,5
		Dấu bằng xảy ra khi $x = 5, y = -3$	
		Vậy $A_{\min} = 1$ khi $x = 5; y = -3$	0,5
		Đặt: $x = 2a, y = 3b, z = 3c \Rightarrow x, y, z > 0$	0,25
		Biểu thức đã cho được viết lại:	
		$P = \frac{y+z}{x} + \frac{2x+z}{y} + \frac{4y-4z}{x+z}$	0,25
	$P = \frac{y+z+x-x}{x} + \frac{2x+z}{y} + \frac{4y+4x-4x-4z}{x+z}$		
	$= \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{z+x}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{4x}{x+z} + \frac{4y}{x+z} \right) - 5$	0,25	

	<p>Lập luận chứng minh được <math>P \geq 5</math>  Dấu bằng xảy ra khi <math>x = y = z</math> hay <math>2a = 3b = 3c</math>  Vậy <math>P_{\min} = 5</math> khi <math>2a = 3b = 3c</math></p>	0,25	
<p><b>4</b> (6,0đ)</p>			
	a	<p>- Chứng minh được: <math>\triangle ABH \sim \triangle CAH \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH</math> 1,0  - Chứng minh được: <math>\triangle ABH \sim \triangle AHD \Rightarrow AH^2 = AD \cdot AB</math> 0,5  - Chứng minh được: <math>\triangle HAE \sim \triangle CAH \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AC</math> 0,5  <math>\Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC</math> 0,5</p>	
	b	<p>Gọi P là trung điểm của BC <math>\Rightarrow P</math> cố định 0,25  Chứng minh được <math>AP \perp DE</math> 0,5  Chứng minh được O là trực tâm tam giác FAP 0,5  <math>\Rightarrow PO \perp AF</math> 0,5  Suy ra đường thẳng đi qua O vuông góc với AF luôn đi qua điểm cố định P 0,25</p>	
	c	<p>Gọi I là trung điểm của OH; gọi K là giao điểm của MI và AN 0,25  <math>\triangle ABC</math> vuông tại A, đường cao AH <math>\Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}</math> 0,25  <math>\Leftrightarrow \frac{AH}{2 \cdot BH} = \frac{CH}{2 \cdot AH} \Leftrightarrow \frac{OH}{BH} = \frac{NH}{AH}</math> 0,25  Chứng minh được <math>\triangle BHO \sim \triangle AHN</math> (c.g.c) 0,25  <math>\Leftrightarrow OBH = NAH \Rightarrow BO \perp AN</math> 0,25  Lại có MI là đường trung bình của <math>\triangle HBO \Rightarrow MI \parallel BO \Rightarrow MK \perp AN</math>  Mặt khác <math>AH \perp MN</math>.  Vậy trực tâm của tam giác AMN là trung điểm I của OH 0,25</p>	
	<p><b>5</b> (1,0đ)</p>	<p>Chứng minh rằng, trong 29 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 100 ta luôn chọn được 2 số có ước chung lớn nhất khác 1.</p>	
			<p>Từ 1 đến 100 có tất cả 26 số nguyên tố 0,25</p>
			<p>Khi phân tích 29 số nguyên dương đã cho ra thừa số nguyên tố, có ít nhất 2 số cùng chứa 1 thừa số nguyên tố nào đó trong 26 số nguyên tố trên 0,5</p>
			<p>Hai số này có ước chung lớn nhất khác 1 0,25</p>
			<p>Vậy đpcm</p>