VẬN DỤNG ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀO VIỆC GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP CÓ LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí Viète

Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Ngược lại, nếu hai số u, v có tổng $u+v=S$ và tích $uv=P$ có $S^2\geqslant 4P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$.

Ý nghĩa của định lí Viète

+ Cho phép nhẩm nghiệm trong những trường hợp đơn giản.

+ Cho phép tính giá trị của biểu thức đối xứng của các nghiệm và xét dấu của các nghiệm không cần giải phương trình.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Dạng 1. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán tính giá trị của biểu thức

Bài 1. Cho x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+2017x+1=0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2+2018x+1=0$.

Tính giá trị của biểu thức $M=(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)$.

Lời giải. Dễ thấy các phương trình đã cho luôn có hai nghiệm, nên theo định lí Viète ta có

$$x_1+x_2=-2017;\ x_3+x_4=-2018;\ x_1x_2=x_3x_4=1.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}M&=\left[x_1x_2+(x_1+x_2)x_3+x_3^2\right]\cdot\left[x_1x_2-(x_1+x_2)x_4+x_4^2\right]=\left(1-2017x_3+x_3^2\right)\cdot\left(1+2017x_4+x_4^2\right)\\&=\left(x_3^2+2018x_3+1-4035x_3\right)\cdot\left(x_4^2+2018x_4+1-x_4\right)=(-4035x_3)(-x_4)=4035x_3x_4=4035.\end{aligned}$$

Nhận xét. Qua ví dụ vừa nêu trên, nếu ta giải trực tiếp hai phương trình bậc hai đã cho để tìm nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sau đó thay giá trị các nghiệm vừa tìm vào biểu thức M thì việc tính giá trị M sẽ trở nên phức tạp. Nếu khéo léo vận dụng định lí Viète thì lời giải bài toán trở nên ngắn gọn, dễ hiểu.

Bài 2. Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $ax_1+bx_2+c=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^2c+ac^2+b^3-3abc$.

(Đề thi TS vào lớp 10 THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2005 - 2006).

Lời giải. Từ $ax_1+bx_2+c=0\Rightarrow x_1+\dfrac{b}{a}x_2+\dfrac{c}{a}=0$ (*)

Theo định lí Viète ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Từ (*) có: $x_1-x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=0\Leftrightarrow x_1-x_2^2=0\Rightarrow x_1=x_2^2$. Do đó:

$M=a^3\left[\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^3-3\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}\right]=a^3\left[x_2^3+x_2^6-\left(x_2^2+x_2\right)^3+3\left(x_2^2+x_2\right)\cdot x_2^3\right]=a^3\cdot 0=0.$

Dạng 2. Vận dụng định lí Viète vào bài toán tìm tham số để các nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn một hệ thức

Bài 3. Tìm m để phương trình: $\left(x^2-1\right)(x+4)(x+6)=m$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=-\dfrac{2}{5}$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)(x+4)(x-1)(x+6)=m\Leftrightarrow\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x-6\right)=m \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2 + 5x + \dfrac{25}{4} = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 \geqslant 0$, khi đó (1) có dạng

$$(4t-9)(4t-49) = 16m \Leftrightarrow 16t^2 - 232t + 441 - 16m = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1,\ t_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 256m + 6400 > 0 \\ S = \dfrac{29}{2} > 0 \\ P = \dfrac{441-16m}{16} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -25 < m < \dfrac{441}{16} \qquad (3)$$

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $4x^2 + 20x + 25 - 4t_1 = 0$ (4)

Gọi $x_3,\ x_4$ là hai nghiệm của phương trình: $4x^2 + 20x + 25 - 4t_2 = 0$ (5)

Áp dụng định lí Viète cho (4), (5) và (2) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -5 \\ x_1x_2 = \dfrac{25-4t_1}{4};\ x_3x_4 = \dfrac{25-4t_2}{4} \\ t_1 + t_2 = \dfrac{29}{2};\ t_1 \cdot t_2 = \dfrac{441-16m}{16} \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} + \frac{x_3+x_4}{x_3x_4} = -\frac{20}{25-4t_1} - \frac{20}{25-4t_2} \\ &= -20\left[\frac{50-4(t_1+t_2)}{625-100(t_1+t_2)+16t_1t_2}\right] = \frac{10}{-24-m}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $m = 1$ (thỏa mãn (3)).

Nhận xét. Với dạng toán này ta thường không giải phương trình để đi tìm nghiệm mà biến đổi biểu thức đã cho theo tổng và tích các nghiệm, sau đó vận dụng định lí Viète. Biểu thức thường biến đổi trong dạng toán này là

$$\begin{aligned} &(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2; \\ &x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2; \\ &x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2); \\ &x_1^4 + x_2^4 = \left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2;\ \ldots \end{aligned}$$

Bài 4. Cho phương trình: $8x^2 - 8x + m^2 + 1 = 0$ (*)

Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$.

Nhận xét. Ta thấy hệ thức đề bài đưa ra có vẻ phức tạp và gây khó khăn khi đưa về $x_1 + x_2$ và x_1x_2 nhưng ta có thể biến đổi $x_1,\ x_2$ thông qua phương trình (*) để sử dụng hệ thức Viète.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 8 - 8m^2$. Để phương trình (*) có hai nghiệm thì $\Delta' \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant 1$. Khi đó theo hệ thức Viète có: $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = \left(m^2+1\right) : 8$.

Vì $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} 8x_1^2 - 8x_1 = -\left(m^2+1\right) \\ 8x_2^2 - 8x_2 = -\left(m^2+1\right) \end{cases}$ (I)

Ta có $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3 \Leftrightarrow x_1^2\left(8x_1^2 - 8x_1\right) - x_2^2\left(8x_2^2 - 8x_2\right) = 0$ (1)

Thay (I) và (1) ta được: $\left(x_1^2 - x_2^2\right)\left(-m^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)\left(-m^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$ (vì $x_1 + x_2 = 1$ và $-m^2 - 1 \neq 0$).

Do đó $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ mà $x_1x_2 = \dfrac{m^2+1}{8}$, suy ra $m = \pm 1$ (thỏa mãn bài toán).

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 = 9$.

Lời giải. $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và theo hệ thức Viète có: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = m^2 - m + 1$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên: $x_1^2 - 2mx_1 + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2mx_1 - m^2 + m - 1$. Kết hợp với đề bài ta có:

$$x_1^2 + 2mx_2 = 9 \Leftrightarrow 2mx_1 - m^2 + m - 1 + 2mx_2 = 9 \Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) - m^2 + m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \text{ (loại)} \\ m = \dfrac{5}{3} \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.$$

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leqslant 3m^2 + 16$.

Lời giải. $\Delta' \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{3}{2}$ (*) thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi đó: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$; $x_1x_2 = m^2 + 4$ và $x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4$. Theo đề bài

$$x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leqslant 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 4m^2 - 20 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow [2(m+1)]^2 - 4m^2 - 20 \leqslant 0 \Leftrightarrow 8m - 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant 2 \text{ (do } x_1 + x_2 = 2(m+1)\text{).}$$

Kết hợp với (*) ta có: $\dfrac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2$.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\left(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1\right)\left(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1\right) < 0 \qquad (2)$$

Lời giải. $\Delta' = (m-2)^2 + 2 > 0$ luôn đúng với mọi m, vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m. Khi đó: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$; $x_1x_2 = 2m - 5$.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0 \\ x_2^2 - 2(m-1)x_2 + 2m - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = 4 - 2x_1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1 = 4 - 2x_2 \end{cases}$$

Từ (2) suy ra:

$$(4 - 2x_1)(4 - 2x_2) < 0 \Leftrightarrow 4x_1x_2 - 8(x_1 + x_2) + 16 < 0$$
$$\Leftrightarrow 4(2m - 5) - 8 \cdot 2(m-1) + 16 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Dạng 3. Vận dụng định lí Viète vào bài toán chứng minh bất đẳng thức, tìm GTLN và GTNN

Bài 8. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a > 0$, $bc = 3a^2$, $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $a \geqslant \sqrt{\dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{3}}$.

Lời giải. Ta có $bc = 3a^2$, $b + c = abc - a = 3a^3 - a$.

Theo định lí Viète đảo thì b, c là nghiệm của phương trình: $x^2-\left(3a^3-a\right)x+3a^2=0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta=a^2\left(9a^4-6a^2-11\right)\geqslant 0\Rightarrow a^2\geqslant\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$, kết hợp với $a>0$ được $a\geqslant\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}}$.

Bài 9. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn $a\neq 0$ và $4a+9b+24c=0$. Tính khoảng cách (GTTĐ) nhỏ nhất của hai nghiệm của phương trình $2ax^2+3bx+4c=0$.

Lời giải. Từ $4a+9b+24c=0\Rightarrow c=-\dfrac{4a+9b}{24}$.

Phương trình đã cho có $\Delta'=9b^2-32ac=9b^2+32a\left(\dfrac{4a+9b}{24}\right)=9\left(b+\dfrac{2a}{3}\right)+\dfrac{4a^2}{3}>0$ (do $a\neq 0$) nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{3b}{2a}$; $x_1x_2=\dfrac{2c}{a}=-\dfrac{4a+9b}{12a}$.

Do đó khoảng cách giữa hai nghiệm của phương trình đã cho là:

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{3b}{2a}\right)^2+4\left(\frac{4a+9b}{12a}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3b+2a}{2a}\right)^2+\frac{1}{3}}.$$

Suy ra $|x_1-x_2|\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy khoảng cách giữa hai nghiệm của phương trình đã cho là $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $2a=-3b=-24c$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $6ax^2-6ax-a=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{6}$.

Bài 10. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm m, n thỏa mãn $0\leqslant m\leqslant n\leqslant 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{5a^2-6ab+b^2}{2a^2-2ab+ac}$.

Lời giải. Từ giả thiết $0\leqslant m\leqslant n\leqslant 1\Rightarrow m^2\leqslant mn$ và $n^2\leqslant 1\Rightarrow(m+n)^2-2mn\leqslant mn+1\Rightarrow(m+n)^2\leqslant 3mn+1$.

Theo định lí Viète có: $m+n=-\dfrac{b}{a}$; $mn=\dfrac{c}{a}$. Do đó

$$P=\frac{5-\dfrac{6b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{2-\dfrac{2b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\frac{5+6(m+n)+(m+n)^2}{2+2(m+n)+mn}\leqslant\frac{5+6(m+n)+3mn+1}{2+2(m+n)+mn}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=n=1\\ \begin{cases} m=0\\ n=1\end{cases}\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} 2c=-b=2a\\ \begin{cases} b=-a\\ c=0\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy $\max P=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2c=-b=2a\\ \begin{cases} b=-a\\ c=0\end{cases}\end{array}\right.$

Bài 11. Cho phương trình $x^2+(m-1)x-6=0$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà $B=\left(x_1^2-9\right)\left(x_1^2-4\right)$ đạt GTLN.

Lời giải. Ta thấy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m vì có $ac=-6<0$. Theo hệ thức Viète: $x_1\cdot x_2=-6\Leftrightarrow x_2=\dfrac{-6}{x_1}$ và $x_1+x_2=1-m$.

$$B=\left(x_1^2-9\right)\left(x_2^2-4\right)=x_1^2\cdot x_2^2-\left(4x_1^2+9x_2^2\right)+36=36-\left(4x_1^2+\frac{324}{x_1^2}\right)+36$$

$$B \leqslant 36 - 2\sqrt{4x_1^2 \cdot \frac{324}{x_1^2}} + 36 = 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4x_1^2 = \dfrac{324}{x_1^2} \Leftrightarrow x_1^4 = 81 \Leftrightarrow x_1 = \pm 3.$

* Khi $x_1 = 3$ thì $x_2 = -2$ suy ra $m = 0$.

* Khi $x_1 = -3$ thì $x_2 = 2$ suy ra $m = 2$.

Vậy $\min B = 0$ khi $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Nhận xét. Với dạng toán này chúng ta kết hợp BĐT cổ điển hay dùng (BĐT Cauchy, BĐT Bunhiacovski, BĐT tam giác, ...) hoặc các tính chất của BĐT cùng với việc vận dụng định lí Viète nhuần nhuyễn sẽ giúp ta tìm ra được lời giải bài toán ngắn gọn, độc đáo.

Dạng 4. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán số học

Bài 12. Cho phương trình $2x^2+mx+2n+8=0$ (x là ẩn số; m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng m^2+n^2 là hợp số.

(Đề thi TS vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011).

Lời giải. Gọi $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}$ là hai nghiệm của phương trình.

Áp dụng định lí Viète vào phương trình đã cho, ta được $x_1+x_2 = -\dfrac{m}{2}$; $x_1x_2 = n+4$. Khi đó

$$m^2+n^2 = (2x_1+2x_2)^2 + (x_1x_2-4)^2 = 4x_1^2+4x_2^2+x_1^2x_2^2+16 = \left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+4\right),$$

là hợp số vì x_1^2+4 và x_2^2+4 là các số nguyên lớn hơn 1.

Bài 13. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-6=0$. Tìm m nguyên dương để $A = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Lời giải. Phương trình đã cho có $\Delta' = (m-1)^2-(2m-6) = (m-2)^2+3 > 0,\ \forall m$. Ta có

$$A = \frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x2\right]^2 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}.$$

Áp dụng định lí Viète vào phương trình đã cho, ta được: $x_1+x_2 = 2(m-1)$; $x_1x_2 = 2m-6$ (*)

Thay (*) vào A, sau đó khai triển và rút gọn lại ta được

$$A = \frac{\left(4m^2-12m+16\right)^2}{(2m-6)^2} - 2 = \left(2m + \frac{16}{2m-6}\right)^2 - 2.$$

Để A nguyên và $m \in \mathbb{Z}^+$ thì $\begin{cases} 16 \,\vdots\, (2m-6) \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-6 \in \{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm 8;\ \pm 16\} \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

Suy ra $m \in \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 11\}$.

Dạng 5. Vận dụng định lí Viète vào một số bài toán liên quan hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Bài 14. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1 (m \neq 0)$. Tìm m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0. \qquad (*)$$

Có $\Delta' = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall m$.

Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

Theo hệ thức Viète, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m-1. \end{cases}$

Do đó $|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4 \Leftrightarrow 4m^2-4(m-1)=4 \Leftrightarrow m=1$ (do $m \neq 0$).

Bài 15. Cho parabol $(P): y=ax^2 (a>0)$ và đường thẳng $(d): 2x-y-a^2=0$.

a) Tìm a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Gọi x_A, x_B là hoành độ của hai điểm A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{x_A+x_B}+\frac{1}{x_A\cdot x_B}.$$

Lời giải. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$ax^2=2x-a^2 \Leftrightarrow ax^2-2x+a^2=0 \qquad (1)$$

Điều kiện cần và đủ để (d) và (P) tại hai điểm phân biệt A, B là phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_A, $x_B \Leftrightarrow \Delta'=1-a^3>0 \Leftrightarrow 0<a<1$ (do $a>0$).

b) Áp dụng hệ thức Viète cho phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_A+x_B=\dfrac{2}{a} \\ x_A\cdot x_B=a. \end{cases}$

Thay vào T thu được $T=\dfrac{4}{x_A+x_B}+\dfrac{1}{x_A\cdot x_B}=2a+\dfrac{1}{a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $2a$ và $\dfrac{1}{a}$, ta có $T \geqslant 2\sqrt{2a\cdot\dfrac{1}{a}}=2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a=\dfrac{1}{a} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $2\sqrt{2}$ đạt được khi $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 16. Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm $I(0;\ 1)$ và cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho độ dài đoạn thẳng $MN=2\sqrt{10}$.

Lời giải. Vì đường thẳng $x=0$ đi qua điểm $I(0;\ 1)$ tiếp xúc với parabol (P) tại điểm $I(0;\ 0)$ nên phương trình các đường thẳng thỏa mãn đề bài là $(d): y=ax+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2=ax+1 \Leftrightarrow x^2-ax-1=0 \qquad (*)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta=a^2+4>0$ (luôn đúng).

Khi đó tọa độ các giao điểm là $M\left(x_1;\ x_1^2\right)$, $N\left(x_2;\ x_2^2\right)$. Ta có

$$\begin{aligned} MN=2\sqrt{10} &\Leftrightarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(x_2^2-x_1^2\right)^2}=2\sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow \left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]\left[1+(x_1+x_2)^2\right]=40 \qquad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Viète cho phương tình (*), ta được $\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1x_2=-1. \end{cases}$

Thay vào (1) thu được $\left(a^2+4\right)\left(1+a^2\right)=40 \Leftrightarrow a^4+5a^2-36=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$.

Vậy phương trình các đường thẳng cần lập là $y=2x+1$ và $y=-2x+1$.

Bài 17. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=-\dfrac{1}{2}x^2$, điểm $I(0;\ -2)$ và điểm $M(m;\ 0)$

(với m là tham số, $m \neq 0$). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, I. Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài đoạn thẳng AB lớn hơn 4.

Lời giải. Phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm $I(0;\,-2)$ và $M(m;\,0)$ là $y = \dfrac{2}{m}x - 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$-\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{m}x - 2 \Leftrightarrow mx^2 + 4x - 4m = 0 \tag{*}$$

Có $\Delta' = 4 + 4m^2 > 0,\ \forall m$. Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, chứng tỏ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.
Khi đó, tọa độ các giao điểm A, B là $A\left(x_1;\,-\dfrac{x_1^2}{2}\right)$; $B\left(x_2;\,-\dfrac{x_2^2}{2}\right)$. Từ đó

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \frac{(x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2)^2}{4} = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]\left[1 + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}\right]. \tag{1}$$

Áp dụng hệ thức Viète cho phương trình (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{4}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = -4. \end{cases}$

Thay vào (1) thu được

$$AB^2 = \left[\left(-\frac{4}{m}\right)^2 - 4\cdot(-4)\right]\left(1 + \frac{16}{m^2}\right) = \left(\frac{16}{m^2} + 16\right)\left(1 + \frac{4}{m^2}\right) > 16,\ \forall m.$$

Suy ra $AB > 4$ (đpcm).

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $I(0;\,-2)$ và có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.

b) Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B lên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông góc tại I.

Lời giải. a) Phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc k và đi qua điểm $I(0;\,-2)$ và $y = kx - 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$-\frac{1}{2}x^2 = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx - 4 = 0 \tag{*}$$

Có $\Delta' = k^2 + 4 > 0,\ \forall k$. Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Chứng tỏ (d) luôn cắt (P) tại hai đi phân biệt A, B.

b) Theo hệ thức Viète, ta có $x_1x_2 = -4$. Giả sử tọa độ các điểm A, B là $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$.
Vì H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục hoành nên tọa độ các điểm H, K là $H(x_1;\,0)$, $K(x_2;\,0)$.
Do đó $IH^2 = x_1^2 + 4$; $IK^2 = x_2^2 + 4$; $HK^2 = (x_1 - x_2)^2$. Suy ra

$$IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 = HK^2.$$

Chứng tỏ tam giác HIK vuông tại I (theo định lí Pythagore đảo).

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - m - 2$

(m là tham số).
a) Chứng minh rằng khi m thay đổi (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.
b) Tìm m để $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$.
Lời giải. a) Xét phương trình

$$-x^2 = mx - m - 2 \Leftrightarrow x^2 + mx - m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = m^2 + 4m + 8 = (m+2)^2 + 4 > 0 \text{ với mọi } m$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Vì vậy, khi m thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

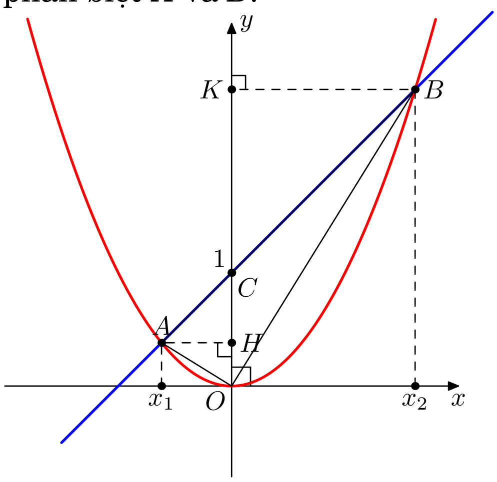
b) Theo hệ thức Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -m - 2. \end{cases}$

Do đó $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -6 \\ m_2 = 2 \end{array}\right.$ (tm).

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = mx + 1$ và parabol $(P): y = x^2$.
a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m = 1$.
b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định và luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
c) Tìm giá trị của tham số m để diện tích tam giác OAB bằng 2 (đơn vị diện tích).
Lời giải. a) Tự làm.
b) Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên luôn đi qua điểm cố định $C(0;\ 1)$ với mọi m.
Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = mx + 1$ và parabol $y = x^2$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, tức là đường thẳng luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B.



c) Gọi hoành độ của A và B theo thứ tự là x_1 và x_2, giả sử $x_1 < x_2$ thì $x_1 < 0 < x_2$ (vì $x_1 \cdot x_2 = -1$).
Do x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình (1) nên $x_1 = \dfrac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}$; $x_2 = \dfrac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}$.
Kẻ AH và BK vuông góc với Oy, ta có $AH = |x_1| = -x_1$, $BK = x_2$.

$$S_{AOB} = S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}(OC \cdot BK + OC \cdot AH)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}OC\cdot(BK+AH)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(x_2-x_1)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{m+\sqrt{m^2+4}-m+\sqrt{m^2+4}}{2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{m^2+4}.\end{aligned}$$

Ta có $S_{AOB}=2\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{m^2+4}}{2}=2\Leftrightarrow\sqrt{m^2+4}=4\Leftrightarrow m^2+4=16\Leftrightarrow m=\pm2\sqrt{3}$.

Cách khác

c) Do $ac<0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1<0<x_2$.

Giả sử $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. Do A, B thuộc (P) nên $y_1=x_1^2$; $y_2=x_2^2$.

Ta có $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2\left(1+x_1^2\right)}$; $OB=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_2^2\left(1+x_2^2\right)}$.

Các đường thẳng OA, OB lần lượt có hệ số góc là: $k_1=\dfrac{y_1}{x_1}=x_1$, $k_2=\dfrac{y_2}{x_2}=x_2$.

Do $k_1\cdot k_2=x_1\cdot x_2=-1$ nên OA vuông góc với OB. Suy ra

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2x_2^2\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+x_1^2+x_2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+4}.$$

Do đó $S_{OAB}=2\Leftrightarrow m=\pm2\sqrt{3}$.

Bài 21. Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=2ax+1$ $(a\neq0)$. Tìm $a\in\mathbb{N}$ để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N và độ dài đoạn thẳng $MN=\sqrt{15}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2=2ax+1\Leftrightarrow 2x^2-2ax-1=0 \qquad (*)$$

Ta thấy $\Delta'=a^2+2>0,\ \forall a$ nên phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N.

Gọi $M\left(x_1;\ 2x_1^2\right)$, $N\left(x_2;\ 2x_2^2\right)$, ta có

$$\begin{aligned}MN=\sqrt{15}\Leftrightarrow MN^2=15&\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+4\left(x_2^2-x_1^2\right)=15\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2\left[1+4(x_2+x_1)^2\right]=15\\&\Leftrightarrow\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]\left[1+4(x_2+x_1)^2\right]=15 \qquad (**)\end{aligned}$$

Áp dụng định lí Viète vào phương trình (*) ta có: $x_1+x_2=a$; $x_1x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Thay vào (**), sau khi khai triển và rút gọn lại ta thu được $4a^4+9a^2-13=0\Leftrightarrow a^2=1$ hoặc $a^2=-\dfrac{13}{4}<0$ (loại) $\Leftrightarrow a=\pm1$.

Vì $a\in\mathbb{N}$ nên $a=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 22. Cho parabol $(P): y=2ax^2$ $(a\neq0)$ và đường thẳng $(d): 4x-y-2a^2=0$. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N có hoành độ x_M, x_N và $\dfrac{8}{x_M+x_N}+\dfrac{1}{2x_Mx_N}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2ax^2=4x-2a^2\Leftrightarrow ax^2-2x+a^2=0 \qquad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, $N\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_M, $x_N\Leftrightarrow$ $\Delta=1-a^3>0\Leftrightarrow 0<a<1$ (do $a>1$).

Áp dụng định lí Viète cho phương trình (*) ta có: $x_M+x_N=\dfrac{2}{a}$; $x_M\cdot x_N=a$ (**)

Thay (**) vào $T=\dfrac{8}{x_M+x_N}+\dfrac{1}{2x_Mx_N}$ thu được $T=4a+\dfrac{1}{2a}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số $4a$ và $\dfrac{1}{2a}$ ta có $T \geqslant 2\sqrt{4a\cdot\dfrac{1}{2a}} = 2\sqrt{2}$.

Ta thấy $\min T = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4a = \dfrac{1}{2a}$ và $0 < a < 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị cần tìm $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Bài 23. Cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m + 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1;\ y_1)$ và $(x_2;\ y_2)$ sao cho $x_1 \cdot x_2(y_1 + y_2) = -48$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$. Khi đó $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-1) \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y_1 = 2x_1 - m + 1 \\ y_2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & x_1x_2(y_1 + y_2) = -48 \Leftrightarrow x_1x_2(2x_1 - m + 1 + 2x_2 - m + 1) = -48 \\ \Leftrightarrow & x_1x_2[2(x_1 + x_2) - 2m + 2] = -48 \Leftrightarrow 2(m-1)[8 - 2m + 2] = -48 \\ \Leftrightarrow & m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \text{ (thỏa mãn)} \\ m = 7 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Bài 24. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = (3-m)x + 2 - 2m$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A;\ y_A)$ và $B(x_B;\ y_B)$ sao cho $|y_A - y_B| = 2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 + (3-m)x + 2 - 2m = 0$ (1)

Phương trình (1) có $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Ta thấy $x_A,\ x_B$ là hai nghiệm của phương trình (1), lại có

$$\begin{cases} x_A + x_B = m - 3 \\ x_A \cdot x_B = 2 - 2m \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y_A = (3-m)x_A + 2 - 2m \\ y_B = (3-m)x_B + 2 - 2m \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & |y_A - y_B| = 2 \Leftrightarrow |(3-m)(x_A - x_B)| = 2 \Leftrightarrow (3-m)^2\left[(x_A + x_B)^2 - 4x_A \cdot x_B\right] = 4 \\ & \Leftrightarrow (m-3)^2(m+1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Tìm được $m = 1 \pm \sqrt{6};\ m = 1 \pm \sqrt{2}$.

Bài 25. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (k-1)x + 4$. Tìm k để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi tọa độ giao điểm là $(x_1;\ y_1)$ và $(x_2;\ y_2)$. Tìm k để $y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - (k-1)x - 4 = 0$ (k là hằng số). Phương trình này có $a \cdot c = -4 < 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.

Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$ và $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$

Do đó

$$y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 \cdot x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (k-1)^2+8=16 \Leftrightarrow k=1\pm 2\sqrt{2}$$

Dạng 6. Vận dụng định lí Viète vào bài toán giải hệ phương trình hai ẩn

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 54x^2-78xy+24y^2=0 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=3 \end{cases}$

Lời giải. ĐK: $3x-y\neq 0$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (3x+y)^2-9(3x+y)(3x-y)+14(3x-y)^2=0 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3x+y}{3x-y}\right)^2-9\left(\dfrac{3x+y}{3x-y}\right)+14=0 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3x+y}{3x-y}=7 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3x+y}{3x-y}=2 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (3x+y)\cdot\dfrac{1}{3x-y}=7 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=3 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} (3x+y)\cdot\dfrac{1}{3x-y}=2 \\ 3x+y+\dfrac{1}{3x-y}=3 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Hệ phương trình (1) vô nghiệm vì $\left(3x+y+\dfrac{1}{3x-y}\right)^2-4(3x+y)\cdot\dfrac{1}{3x-y}=9-28<0.$

Từ hệ phương trình (2) và theo định lí Viète đảo suy ra $3x+y$ và $\dfrac{1}{3x-y}$ là các nghiệm của phương trình

$X^2-3X+2=0\Leftrightarrow X=1$ hoặc $X=2$. Từ đó

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+y=1 \\ \dfrac{1}{3x-y}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+y=2 \\ \dfrac{1}{3x-y}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;\ y)$ là $\left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{4}\right), \left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không giải phương trình, gọi $x_1,\ x_2\ (x_1>x_2)$ là các nghiệm của phương trình $x^2-\dfrac{\sqrt{83}}{4}x+\dfrac{19}{16}=0$. Tính $x_1^3-x_2^3$.

Bài 2. Gọi $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ là bốn nghiệm của phương trình $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)=1$. Tính giá trị của biểu thức $x_1x_2x_3x_4$.

Bài 3. Cho phương trình $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=mx^2$, giả sử m nhận các giá trị sao cho phương trình có bốn nghiệm $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ đều khác 0. Chứng minh rằng $T=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$ không phụ thuộc m.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m+1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_2-x_1=8$.

Bài 5. Cho phương trình $2x^2-(3m-2)x-2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và $\dfrac{3}{2}(x_1-x_2)^2+2\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}+\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Cho hai phương trình $x^2+2ax+1=0$ và $x^2+2bx+31=0$ có nghiệm chung $|a|+|b|$ nhỏ nhất. Tìm a và b.

Bài 7. Cho phương trình $x^2-4mx-2m=0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm GTNN của biểu thức $P=\dfrac{m^2}{x_2^2+4mx_1+6m}+\dfrac{x_1^2+4mx_2+6m}{m^2}$.

Bài 8. Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $|a(b-c)|>\left|b^2-ac\right|+\left|c^2-ab\right|$ và phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm thực nhỏ hơn $\sqrt{3}-1$.

Bài 9. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+2kx+6=0$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho có bất đẳng thức $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2\geqslant 5$.

Bài 10. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=5$ và $xy+yz+zx=8$. Chứng minh rằng $1\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{3}$, $1\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{3}$, $1\leqslant z\leqslant\dfrac{7}{3}$.

Bài 11. Tìm tất cả $a\in\mathbb{N}$ để phương trình $x^2-a^2x+a+1=0$ có nghiệm nguyên.

Bài 12. Tìm tất cả các giá trị thực của a để phương trình $2x^2-\left(4a+\dfrac{11}{2}\right)x+4a^2+7=0$ có nghiệm nguyên.

Bài 13. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $\left(4+\sqrt{17}\right)^7$.

Bài 14. Cho parabol $(P): y=3x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x-m+1 (m\neq 0)$. Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=5$.

Bài 15. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+4$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m.

b) Tìm các giá trị của m để đoạn thẳng AB có độ dài ngắn nhất.

Bài 16. Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm $I(0;\,-4)$ và cắt parabol $(P): y=\dfrac{1}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho độ dài đoạn thẳng $MN=3\sqrt{5}$.

Bài 17. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB theo tham số m.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=bx+b+2$.

a) Tìm b để đường thẳng (d) đi qua điểm $B(3;\,0)$.

b) Tìm b để đường thẳng cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $E(x_1;y_1)$, $F(x_2;y_2)$ thỏa mãn hệ thức: $x_1y_2+x_2y_1+15=0$.

Bài 19. Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A, B là giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích của tam giác OAB theo m (O là gốc tọa độ).

Bài 20. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-mx+m+2$ $(m\neq 0)$. Tìm m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_A, x_B thỏa mãn $|x_A-x_B|=\sqrt{29}$.

Bài 21. Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=-\dfrac{3}{m}x+3$ $(m\neq 0)$. Chứng minh rằng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có độ dài đoạn thẳng AB lớn hơn $2\sqrt{6}$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-2x)(3x+4y)=6 \\ x^2+x+4y=5 \end{cases}$

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-4y-4=0 \\ x^2+y^2-3x-3y-22+m=0 \end{cases}$

Trong trường hợp hệ có nghiệm $(x_1;\ y_1)$ và $(x_2;\ y_2)$ hãy tìm m để $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=7$.

Bài 24. Cho phương trình $2x^2+(m-1)x-m-1=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm là số đo của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài).

Hướng dẫn. Bản chất của bài toán gồm 2 bước:

Bước 1. Phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1\cdot x_2>0 \end{cases}$

Bước 2. Hai nghiệm $x_1,\ x_2$ là số đo 2 cạnh của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài) thì thỏa mãn: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{h^2}$.

Bài 25. Cho phương trình $x^2-3mx-m=0$ (m là tham số khác 0) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thứ $A=\frac{m^2}{x_2^2+3mx_1+3m}+\frac{x_1^2+3mx_2+3m}{m^2}$.

Hướng dẫn. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $9m^2+4m>0 \Leftrightarrow m>0$ hoặc $m<-\frac{4}{9}$ (*)

Theo định lí Viète, ta có $x_1+x_2=3m$ và $x_1x_2=-m$, khi đó

$$\frac{m^2}{x_2^2+3mx_1+3m}=\frac{m^2}{x_2^2+(x_1+x_2)x_1-3x_1x_2}=\frac{m^2}{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\frac{m^2}{(x_1-x_2)^2}>0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương: $A=\frac{m^2}{(x_1-x_2)^2}+\frac{(x_1-x_2)^2}{m^2}\geqslant 2$, do đó

$$\min A=2 \Leftrightarrow \frac{m^2}{(x_1-x_2)^2}=\frac{(x_1-x_2)^2}{m^2} \Leftrightarrow m^4=(x_1-x_2)^4 \Leftrightarrow m^2=(x_1-x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2x_2^2=(x_1-x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2x_2^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1x_2+4)=9m^2 \Leftrightarrow -m(-m+4)=9m^2$$

$$\Leftrightarrow 8m^2+4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (loại)} \\ m=-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy với $m=-\frac{1}{2}$ thì $A=2$.

Bài 26. Cho phương trình $x^2-6x-m=0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $x_1^2-x_2^2=12$.

Hướng dẫn. $\Delta=36+4m>0 \Leftrightarrow m>-9$.

* Áp dụng định lí Viète, ta có $x_1+x_2=6$; $x_1x_2=-m$.

* Ta có $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=12 \Rightarrow x_1-x_2=2$. Suy ra $x_1=4$, $x_2=2$.

Từ đó suy ra $m=-4\cdot 2=-8$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy với $m=-8$ thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2-x_2^2=12$.

Bài 27. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $x^4-4x^3+8x+m=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn. *Cách 1.* Ta có $x^4-4x^3+8x+m=0$ (1)
$\Leftrightarrow (x-1)^4-6(x-1)^2+m+5=0.$
Đặt $y=(x-1)^2$, $y\geqslant 0$ phương trình có dạng: $y^2-6y+m+5=0$ (2)
Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9-(m+5)>0\\ 6>0\\ m+5>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-m>0\\ m>-5\end{cases} \Leftrightarrow -5<m<4.$$

Cách 2. Ta có $x^4-4x^3+8x+m=0$ (1)
$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)^2-4\left(x^2-2x\right)+m=0.$
Đặt $y=x^2-2x$ phương trình có dạng: $y^2-4y+m=0$ (3)
Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ (x_1+1)(x_2+1)>0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-m>0\\ x_1x_2+x_1+x_2+1>0\\ x_1+x_2>-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<4\\ 4+m+1>0\\ 4>-2\end{cases} \Leftrightarrow -5<m<4.$$

Bài 28. Chứng minh rằng a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2+px+1=0$ (1) còn c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2+qx+1=0$ (2) thì ta có hệ thức: $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$.

Hướng dẫn. Theo hệ thức Viète, ta có: $a+b=-p$; $c+d=-q$ và $ab=cd=1$. Xét

$$\begin{aligned}(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)&=\left(ab-ac-bc+c^2\right)\left(ab+ad+bd+d^2\right)\\ &=\left(1+pc+c^2\right)\left(1-pd+d^2\right)\\ &=1-pd+d^2+pc-p^2cd+pcd^2+c^2-pc^2d+c^2d^2\\ &=1-pd+d^2+pc-p^2+pd+c^2-pc+1\\ &=c^2+2+d^2-p^2=(c+d)^2-p^2=q^2-p^2.\end{aligned}$$

Suy ra $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$ (đpcm).

Nhận xét. Nếu chọn p và q là hai số nguyên sao cho q^2-p^2 là số chính phương thì ta có kết quả: $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là số chính phương.
Chẳng hạn, cho số nguyên m, chứng minh rằng nếu a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2+15mx+1=0$ (1) còn c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2+17mx+1=0$ (2) thì ta có $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là số chính phương.

Bài 29. Cho phương trình $x^2+px+q=0$ (1). Hãy tìm các giá trị nguyên của p và q sao cho phương trình (1) có hai nghiệm nguyên phân biệt và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

Hướng dẫn. Giả sử phương trình có hai nghiệm nguyên phân biệt và $x_2=4x_1$, ta có

$$\begin{cases}p^2-4q>0\\ x_1+x_2=5x_1=-p\\ x_1x_2=4x_2^2=q\\ p;\ q\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-\dfrac{p}{5}\\ \dfrac{4p^2}{25}=q.\end{cases}$$

Suy ra $p^2 \vdots 25 \Rightarrow p^2 = 25k^2$ $(k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow p = \pm 5k$.
Do đó $q = \dfrac{4 \cdot 25k^2}{25} = 4k^2$.
Vậy $(p;\ q) \in \left\{\left(5k;\ 4k^2\right);\ \left(-5k;\ 4k^2\right)\right\}$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm nguyên phân biệt và một nghiệm gấp 4 lần nghiệm kia.

Bài 30. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ với n nguyên dương.
a) Chứng minh rằng: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$;
b) Không khai triển, không dùng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^5} + \frac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)^5}.$$

Hướng dẫn. a) x_1 là nghiệm của phương trình nên $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$; x_2 là nghiệm của phương trình nên $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$.
Suy ra: $ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0$ (1); $ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0$ (2)
Từ (1), (2) cộng vế với vế, ta được: $a\left(x_1^{n+2} + x_2^{n+2}\right) + b\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right) + c\left(x_1^n + x_2^n\right) = 0$.
Từ đó suy ra: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$.
b) Đặt: $x_1 = 1 + \sqrt{3}$; $x_2 = 1 - \sqrt{3}$; $S_n = x_1^n + x_2^n$.
Suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2. \end{cases}$
Vậy $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$. Áp dụng câu a), ta có:

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} - 2S_n = 0 \Leftrightarrow S_{n+2} = 2S_{n+1} + 2S_n \qquad (*)$$

Ta có: $S_1 = 2$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 4 = 8$.
Áp dụng công thức (*), ta có

$$S_3 = 2S_2 + 2S_1 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 20;\ S_4 = 2S_3 + 2S_2 = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 8 = 56;$$
$$S_5 = 2S_4 + 2S_3 = 2 \cdot 56 + 2 \cdot 20 = 152.$$

Ta có $A = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^5} + \dfrac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)^5} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^5 + \left(1-\sqrt{3}\right)^5}{\left(1+\sqrt{3}\right)^5 \cdot \left(1-\sqrt{3}\right)^5} = \dfrac{152}{-32} = \dfrac{-19}{4}$.

Bài 31. Cho phương trình $\left(m^2 + 2m + 2\right)x^2 - \left(m^2 - 2m + 2\right)x - 1 = 0$. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.
a) Tìm các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2(2x_1x_2 - 1)$;
b) Tìm giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$.

Hướng dẫn. a) Vì $a = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0$ với mọi m nên phương trình đã cho là phương trình bậc hai với mọi m.
Mặt khác, vì $c = -1 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $x_1,\ x_2$ với mọi m.
Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-1}{m^2 + 2m + 2} \end{cases}$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2(2x_1x_2 - 1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = (x_1x_2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = 2x_1x_2 & (1) \\ x_1 + x_2 = -2x_1x_2 & (2) \end{array}\right.$

Ta có:

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{m^2-2m+2}{m^2+2m+2}=\dfrac{2\cdot(-1)}{m^2+2m+2}\Leftrightarrow m^2-2m+4=0$ (vô nghiệm).

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{m^2-2m+2}{m^2+2m+2}=\dfrac{(-2)\cdot(-1)}{m^2+2m+2}\Leftrightarrow m^2-2m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=2\end{array}\right.$

b) $S=x_1+x_2=\dfrac{m^2-2m+2}{m^2+2m+2}\Leftrightarrow (S-1)m^2+2(S+1)m+2(S-1)=0$ (*)

+ Nếu $S=1$ thì $m=1$.

+ Nếu $S\neq 1$ (với $m\neq 0$) thì phương trình (*) là phương trình bậc hai luôn có nghiệm nên

$$\Delta'\geqslant 0\Leftrightarrow (S+1)^2-2(S-1)^2\geqslant 0\Leftrightarrow S^2-6S+1=0\Leftrightarrow (S-3)^2\leqslant 8$$
$$\Leftrightarrow 3-2\sqrt{2}\leqslant S\leqslant 3+2\sqrt{2}.$$

So sánh với $S=1$, ta có

$$\max S=3+2\sqrt{2} \text{ khi } m=\frac{-b}{2a}=\frac{S+1}{1-S}=-\sqrt{2} \text{ và}$$
$$\min S=3-2\sqrt{2} \text{ khi } m=\frac{-b}{2a}=\frac{S+1}{1-S}=\sqrt{2}$$

Bài 32. Cho phương trình $x^2-mx-4=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{2(x_1+x_2)+7}{x_1^2+x_2^2}$.

b) Tìm các giá trị của m sao cho hai nghiệm của phương trình đều là các số nguyên.

Hướng dẫn. Ta có $\Delta=m^2+16>0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

a) Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=m$; $x_1x_2=-4$.

Do đó $A=\dfrac{2(x_1+x_2)+7}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\dfrac{2m+7}{m^2+8}$.

Xét hiệu: $1-A=1-\dfrac{2m+7}{m^2+8}=\dfrac{(m-1)^2}{m^2+8}\geqslant 0$ với mọi m.

Suy ra GTLN của A bằng 1 khi $m=1$.

b) Vì x_1, x_2 nguyên và $x_1x_2=-4=(-4)\cdot 1=(-2)\cdot 2=(-1)\cdot 4$ nên $m=x_1+x_2\in\{-3;\ 0;\ 3\}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm đều là số nguyên khi $m\in\{-3;\ 0;\ 3\}$.

Nhận xét.

- Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để tìm GTLN của A như sau:

Ta có: $m^2+1\geqslant 2|m|\geqslant 2m\Rightarrow \dfrac{\left(m^2+1\right)+7}{m^2+8}\geqslant\dfrac{2m+7}{m^2+8}\Rightarrow 1\geqslant A$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $m=1$.

- Ta cũng có thể tìm đồng thời tìm cả GTLN và GTNN của A bằng phương pháp miền giá trị như sau: $A=\dfrac{2m+7}{m^2+8}\Leftrightarrow Am^2-2m+8A-7=0$.

* Nếu $A=0$ thì $m=\dfrac{7}{2}$.

* Nếu $A\neq 0$ thì phương trình bậc hai ẩn m luôn có nghiệm, do đó:

$$\Delta'\geqslant 0\Leftrightarrow -8A^2+7A+1\geqslant 0\Leftrightarrow (A-1)(1-8A)\geqslant 0-\frac{1}{8}\leqslant A\leqslant 1.$$

Khi $A=1$ thì $m=1$ và khi $A=-\frac{1}{8}$ thì $m=-8$.

- Do đó, tùy thuộc vào biểu thức của nghiệm mà ta vận dụng linh hoạt các cách giải (miền giá trị, biến đổi bình phương, áp dụng bất đẳng thức kinh điển, ...) để cách giải đúng và nhanh.
- Ta có thể tìm được thêm GTNN của A như sau: Xét $8A+1=\frac{8(m+7)}{m^2+8}+1=\frac{(m+8)^2}{m^2+8}\geqslant 0$ với mọi m.

Suy ra GTNN của A bằng $-\frac{1}{8}$, đạt được khi $m=-8$.

Bài 33. Cho $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-7x+3=0$.

a) Hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2x_1-x_2$ và $2x_2-x_1$;

b) Tính giá trị của biểu thức $B=|2x_1-x_2|+|2x_2-x_1|$.

Hướng dẫn. a) Theo định lí Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x_1-x_2)+(2x_2-x_1)=7 \\ (2x_1-x_2)\cdot(2x_2-x_1)=9x_1x_2-2(x_1+x_2)^2=-71. \end{cases} \quad (\text{đúng vì } 7^2>4\cdot(-71)).$$

Theo định lí Viète đảo, ta có $y_1=2x_1-x_2$ và $y_2=2x_2-x_1$ là hai nghiệm của phương trình $y^2-7y-71=0$.

b) Ta có: $B=|2x_1-x_2|+|2x_2-x_1|=|y_1|+|y_2|=\left|\frac{7-\sqrt{333}}{2}\right|+\left|\frac{7+\sqrt{333}}{2}\right|=\sqrt{333}$.

Bài 33. Giả sử $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-4x-1=0$. Chứng minh rằng $x_1^5+x_2^5$ là một số nguyên.

Hướng dẫn. Theo định lí Viète, ta có $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=-1$, khi đó

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=14;$$
$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=52;$$
$$x_1^5+x_2^5=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^3+x_2^3\right)-(x_1x_2)^2(x_1+x_2)=724 \text{ (đpcm)}.$$

Nhận xét.

- Ta đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$ thì $S_{n+2}-4S_{n+1}+S_n=0$. Do đó S_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n.
- Với S_n là một số nguyên thì ta cũng có thể gắn các bài toán số học vào đây, ví dụ như bài toán chứng minh chia hết, bài toán tìm số dư khi chia S_n cho một số nào đó chẳng hạn như tìm số dư khi chia $x_1^{2005}+x_2^{2005}$ cho 5, ...

Bài 34. Tìm m để phương trình $x^2+x+m=0$ (*) có hai nghiệm đều lớn hơn m.

Hướng dẫn. *Cách 1.* Đặt $t=x-m$, ta có $x=t+m$ và $x\geqslant m \Leftrightarrow t\geqslant 0$.

Phương trình (*) $\Leftrightarrow t^2+(2m+1)t+m^2+2m=0$ (1)

Phương trình (*) có hai nghiệm x đều lớn hơn m khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm t đều lớn hơn 0. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_1\geqslant 0 \\ S_1>0 \\ P_1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2-4\left(m^2+2m\right)\geqslant 0 \\ -(2m+1)>0 \\ m(m+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$$

Cách 2. Phương trình (*) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ đều lớn hơn m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ (x_1-m)(x_2-m)>0 \\ (x_1-m)+(x_2-m)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2>0 \\ (x_1+x_2)-2m>0. \end{cases}$$

Thay $x_1+x_2=-1,\ x_1x_2=m$ vào hệ trên ta tìm được $m<-2$.

Cách 3. Với điều kiện $m \leqslant \dfrac{1}{4}$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Sử dụng công thức nghiệm ta tính $x_1,\ x_2$ theo m rồi giải đồng thời hai bất phương trình $x_1>m$ và $x_2>m$ thu được $m<-2$.

Bài 35. Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là bốn số thực đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) Phương trình $x^2-2cx-5d=0$ có hai nghiệm $a,\ b$;

ii) Phương trình $x^2-2ax-5b=0$ có hai nghiệm $c,\ d$.

Chứng minh rằng: $a-c=c-b=d-a$ và $a+b+c+d=30$.

Hướng dẫn. Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} a+b=2c \\ ab=-5d \end{cases}$ và $\begin{cases} c+d=2a \\ cd=-5b \end{cases}$

Suy ra $a+b=2c$ và $a+b+c+d=2a+2c \Rightarrow a-c=c-b$ và $c-b=d-a \Rightarrow a-c=c-b=d-a$.

Đặt $m=a-c=c-b=d-a \Rightarrow \begin{cases} c=a-m \\ b=c-m=a-2m \\ d=a+m \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=4a-2m$ (vì $a \neq c$ nên $m \neq 0$).

Từ $ab=-5d$ ta có: $a(a-2m)=-5(a+m) \Rightarrow a^2-2am=-5a-5m$ (1)

Từ $cd=-5b$ ta có: $(a-m)(a+m)=-5(a-2m) \Rightarrow a^2-m^2=-5a+10m$ (2)

Lấy (1) trừ vế theo vế cho (2) ta được $m(m-2a)=-15m \Rightarrow m-2a=-15$ (vì $m \neq 0$), suy ra đpcm.

Bài 36. Tìm các số $a,\ b,\ c,\ d$ sao cho phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm $c,\ d$ còn phương trình $x^2+cx+d=0$ có nghiệm $a,\ b$.

Hướng dẫn. Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} c+d=-a \\ cd=b \end{cases}$ và $\begin{cases} a+b=-c \\ ab=d \end{cases}$

Suy ra $a+b+c=a+c+d=0,\ b=cd$ và $d=ab \Rightarrow a+b+c=0$ và $b=d=cd=ab$. Từ đó ta có:

* Nếu $b=0$ thì $d=0,\ c=-a$ với a là số nguyên tùy ý. Ta được hai phương trình là $x^2+ax=0$ và $x^2-ax=0$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Nếu $b \neq 0$ thì $a=c=1$ và $b=d=-2$. Ta được hai phương trình đều là $x^2+x-2=0$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 37. Có hay không các số nguyên $b,\ c$ sao cho các phương trình $x^2+bx+c=0$ (1) và $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ (2) có các nghiệm đều là các số nguyên.

Hướng dẫn. Nếu $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình (1) thì theo định lí Viète ta có: $x_1+x_2=-b$ (3) và $x_1x_2=c$ (4)

Nếu $x_3,\ x_4$ là nghiệm của phương trình (2) thì theo định lí Viète ta có: $2(x_3+x_4)=-(b+1)$ (5) và $2x_3x_4=c+1$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $b,\ c$ đều là số lẻ. Kết hợp với (4) ta có $x_1,\ x_2$ là các số lẻ. Từ đó (3) không thỏa mãn.

Vậy không có các số nguyên $b,\ c$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.