CHUYÊN ĐỀ:

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN CHUYÊN ĐỀ:

Trong chương trình toán THCS thì phương trình nghiệm nguyên vẫn luôn là một đề tài hay và khó đối với học sinh. Các bài toán nghiệm nguyên thường xuyên có mặt tại các kì thi lớn nhỏ trong nước và ngoài nước.

Tuy nhiên lại không có nhiều tài liệu viết riêng về nội dung này, do vậy để phục vụ giảng dạy của bản thân, đặc biệt là công tác bồi dưỡng học đội tuyển học sinh giỏi và bồi dưỡng học sinh thi vào các trường chuyên lớp chọn nên tôi đã viết chuyên đề này.

Trong chuyên đề này tôi chỉ mới đề cập đến vấn đề nghiệm nguyên (cụ thể là các dạng và phương pháp giải) chứ không đi sâu vì vốn hiểu biết còn có hạn.

II. PHẠM VI VÀ MỤC ĐÍCH CỦA CHUYÊN ĐỀ:

1. Phạm vi của chuyên đề:

- Áp dụng với đối tượng học sinh khá- giỏi các khối 8- 9

2. Mục đích chuyên đề:

- Trao đổi với đồng nghiệp và học sinh một số phương pháp cũng như là một số bài toán giải phương trình nghiệm nguyên trong chương trình bồi dưỡng học sinh khá- giỏi các lớp 8, 9
- Giúp học sinh biết vận dụng các phương pháp trên một cách linh hoạt trong việc giải quyết các bài toán về nghiệm nguyên từ dễ đến khó.

B- NỘI DUNG.

PHƯƠNG PHÁP 1: *ÁP DỤNG TÍNH CHIA HẾT.*

Các tính chất thường dùng :

– Nếu a ⋮ m và a ± b ⋮ m thì b ⋮ m.

– Nếu a ⋮ b, b ⋮ c thì a ⋮ c.

– Nếu ab⋮ c mà ƯCLN(b , c) = 1 thì a⋮ c.

– Nếu a⋮ m, b⋮ n thì ab⋮ mn.

– Nếu a⋮ b, a⋮ c với ƯCLN(b , c) = 1 thì a⋮ bc.

– Trong m số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng tồn tại một số là bội của m.

1. Phương trình dạng ax + by =c.

ví du 1: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 2x + 25y = 8 (1)

Giải:

Có thể dễ dàng thấy rằng y chẵn. Đặt y =2t phương trình (1) trở thành: x + 25t = 4
Từ đó ta có nghiệm của phương trình.

$$\begin{cases} x = 4 - 25t \\ y = 2t \\ t \in Z \end{cases}$$

Chú ý: ***ta còn có cách thứ hai để tìm nghiệm của phương trình trên. Đó là phương pháp tìm nghiệm riêng để giải phương trình bậc nhất hai ẩn. Ta dựa vào định lý sau:***
Nếu phương trình ax + by =c. với (a;b) = 1 có nghiệm là (x_0; y_0) thì mọi nghiệm nguyên của phương trình nhận từ công thức.

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \\ t \in Z \end{cases}$$

Định lý này chứng minh không khó (bằng cách thế trực tiếp vào phương trình) dựa vào định lý này ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng của phương trình ax + by =c.
Đối với các phương trình có hệ số a,b,c nhỏ thì việc tìm nghiệm riêng khá đơn giản xong với phương trình có các hệ số a,b,c lớn thì không dễ dàng chút nào, do đó ta phải dùng đến thuật toán Ơclít.

2.Đưa về phương trình ước số:

Ví du2: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2x+5y+3xy=8$ (2)

Giải:

$(2) \Leftrightarrow x(2+3y)+5y=8$

$\Leftrightarrow 3[x(2+3y)+5y]=24$

$\Leftrightarrow 3x(2+3y)+15y=24$

$\Leftrightarrow 3x(2+3y)+15y+10=34$

$\Leftrightarrow 3x(2+3y)+5(2+3y)=34$

$\Leftrightarrow (2+3y)(3x+5)=34$

Vì 34=17.2=34.1=(-17).(-2) = (-1).(-34) nên ta có bảng kết quả:

$3x+5$	-34	-1	2	17
$2+3y$	-1	-34	17	2
x	-13	-2	-1	4
y	-1	-12	5	0

Ví du3: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2+2y^2+3xy-2x-y=6$ (3)

Giải:

$(3) \Leftrightarrow x^2+x(3y-2)+2y^2-y+a=6+a$ (a là một số chưa biết được xác định sau).

Xét phương trình; $x^2+(3y-2).x+2y^2-y+a=0$

Có $\Delta=(3y-2)^2-4(2y^2-y+a)=y^2-8y+4-4a$

Chọn a = -3

Ta có $\Delta=y^2-8y+16=(y-4)^2$

$\Rightarrow x_1=-y-1; \quad x_2=-2y+3$ từ đó ta có phương trình ước số:

$(x+y+1)(x+2y-3)=3$

Suy ra kết quả: $(x;y)\in\{(-6;6),(0;2),(-4;2),(-10;6)\}$

3.Tách giá trị nguyên.

Ví du 4: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$xy-x-y=2$ (4)

Giải:

$(4) \Leftrightarrow x(y-1)=y+2$

Ta có y = 1 không phải là nghiệm của phương trình

Với $y\neq 1$ ta có: $x=\dfrac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x=1+\dfrac{3}{y-1} \Rightarrow y-1\in Ư_{(3)}=\{-3;-1;1;3\}$

$\Leftrightarrow y\in\{-2;0;2;4\} \Rightarrow (x;y)\in\{(0;-2),(-2;0),(4;2),(2;4)\}$

PHƯƠNG PHÁP 2: ***PHƯƠNG PHÁP LỰA CHỌN MODULO*** (***hay còn gọi là xét số dư từng vế***)

Trước tiên ta có các tính chất cơ bản sau: Một số chính phương khi chia cho 3 dư 0;1. chia cho 4 dư 0;1. chia cho 8 dư 0;1;4. vv..

1. Xét số dư hai vế.

Ví du 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x+2=y^2+y$ (*)

Giải:

Ta có: $VT=9x+2\equiv 2(\bmod 3)\Rightarrow VP=y^2+y\equiv 2(\bmod 3)\Leftrightarrow y(y+1)\equiv 2(\bmod 3)$

$\Rightarrow y\equiv 1(\bmod 3)$ (vì nếu y=3k hoặc y = 3k+2 thì $VP\equiv 0(\bmod 3)$).

$\Rightarrow y=3k+1$ (trong đó k $\in Z$) thay vào pt(*) ta có :

$9x+2=(3k+1)^2+(3k+1)\Leftrightarrow 9x=9k^2+9k\Leftrightarrow x=k^2+k$

Vậy $\begin{cases} x=k^2+k \\ y=3k+1 \\ k\in Z \end{cases}$

Ví du 6: Giải phương trình nghiệm nguyên không âm sau:

$$(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$$

Giải:

Ta có $2^x; 2^x+1; 2^x+2; 2^x+3; 2^x+4$ là 5 số tự nhiên liên tiếp $2^x(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)\vdots 5$

Mặt khác ƯCLN(2^x;5) = 1 nên $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)\vdots 5$

Với $y\ge 1$ thì $VT=(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y\vdots 5$ còn $VP=11879\equiv 4(\bmod 5)$ suy ra phương trình không có nghiệm.

Với y =0 ta có :

$(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^0=11879\Leftrightarrow(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)=11880$

$\Leftrightarrow(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)=9.10.11.12\Rightarrow 2^x+1=9\Leftrightarrow 2^x=8\Leftrightarrow 2^x=2^3\Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;0)$

Ví du 7: Tìm x, y nguyên dương thoả mãn : $3^x+1=(y+1)^2$

Giải:

$3^x+1=(y+1)^2\Leftrightarrow 3^x=y(y+2)$ (**)

Ta có $VT=3^x\equiv 1(\bmod 2)\Rightarrow VP=y(y+2)\equiv 1(\bmod 2)$

Suy ra y là số lẻ mà y và y+2 là hai số lẻ liên tiếp

Từ pt(**) $\Rightarrow\begin{cases} y=3^m \\ y+2=3^n \\ m+n=x \end{cases}$

Ta có y +2 > y $\Rightarrow$ n > m ≥ 1
Nếu m > 1 thì y và y+ 2 đều chia hết cho 3 (*vô lí vì (y; y+2) =2*)
Vậy m =1 $\Rightarrow$ n = 0 $\Rightarrow$ x=1 $\Rightarrow$ y =1

2.Sử dụng số dư để chỉ ra phương trình vô nghiệm.

Ví du 8: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$19^x + 5^y + 1890 = 1975^{4^{30}} + 2013$$

Giải:

Ta có x ,y nguyên dương $\Rightarrow 5^y \vdots 5;\quad 1890 \vdots 5 \Rightarrow VT = 19^x + 5^y + 1890 \equiv 19^x \pmod 5$

Mặt khác: $19 \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 19^x \equiv (-1)^x \pmod 5$

Nếu x chẵn thì $19^x \equiv 1 \pmod 5$; nếu x lẻ thì $19^x \equiv -1 \pmod 5 \equiv 4 \pmod 5$

$\Rightarrow VT \equiv 1; 4 \pmod 5$ còn $VP \equiv 3 \pmod 5$ Do đó phương trình vô nghiệm.

Ví du 9: Tìm các số nguyên dương x, y biết: $x^2 + x - 1 = 3^{2y+1}$

Giải:

Ta có: $VP = 3^{2y+1} \equiv 0 \pmod 3$ (*)

Nếu x =3k ($k \in N^*$) thì $VT = x^2 + x - 1 \equiv 2 \pmod 3$

Nếu x =3k +1 ($k \in N$) thì $VT = x^2 + x - 1 \equiv 1 \pmod 3$

Nếu x =3k +2 ($k \in N$) thì $VT = x^2 + x - 1 \equiv 1 \pmod 3$

Vậy với $\forall x \in Z^+$ thì $VT = x^2 + x - 1 \equiv 1; 2 \pmod 3$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra không tồn tại các số nguyên dương x, y thoả mãn bài toán.

Chú ý: Nhiều bài toán thi vô địch các nước đôi khi phải xét đến Modulo khá lớn
VD (IMO năm 1999).

Ví du 10: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $m^2 = n^5 - 4$

Giải:

$m^2 \equiv 0;1;3;4;5;9 \pmod{11}$ còn $n^5 - 4 \equiv 6;7;8 \pmod{11}$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Đối với các phương trình nghiệm nguyên có sự tham gia của các số lập phương thì Modulo thường dùng là Mod9 Vì $x^3 \equiv 0;1;8 \pmod 9$

Ví du 11: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$ (8)

Giải:

Dựa vào nhận xét trên: Ta có $x^3 \equiv 0;1;8 \pmod 9$; $y^3 \equiv 0;1;8 \pmod 9$ $z^3 \equiv 0;1;8 \pmod 9$

$\Rightarrow VT = x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0;1;2;3;6;7;8 \pmod 9$

Còn $VP = 2011 \equiv 4 \pmod 9$ nên phương trình vô nghiệm

PHƯƠNG PHÁP 3: *DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC*.

1. Đối với các phương trình mà các biến có vai trò như nhau thì người ta thường dùng phương pháp sắp thứ tự các biến.

Ví du 12: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau: $x+y+z=3xyz$

Giải.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $1\le x\le y\le z$

$\Rightarrow 3xyz = x+y+z\le 3z$

$\Rightarrow xy\le 1\Rightarrow x=1; y=1\Rightarrow z=1$

Vậy nghiệm của phương trình là (x;y;z)= (1;1;1).

Chú ý: *Đối với phương trình nghịch đảo các biến ta cũng có thể dùng phương pháp này (nếu vai trò các biến cũng như nhau). Ta có cách giải khác của ví dụ 9:*

Chia cả hai vế của phương trình cho xyz ta có: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{yz}=3$

Giải:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $1\le x\le y\le z\Rightarrow \frac{1}{xy}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{yz}=3\le \frac{3}{x^2}\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow x=1$

Suy ra: y = 1; z =1.

Ví du 13: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Giải:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $1\le x\le y\le z\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\le \frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3$

Lần lượt thử x = 1 thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Xét x = 2 ta có $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\le \frac{2}{y}\Rightarrow y\le 4$

Mặt khác $y\ge x=2\Rightarrow y\in\{2;3;4\}$ ta thử lần lượt các giá trị của y:

y= 2 phương trình không có nghiệm nguyên.

y=3 $\Rightarrow$z=6

y=4 $\Rightarrow$z=4

xét x =3ta có: $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}\le \frac{2}{y}\Rightarrow y\le 3$

Mặt khác $y\ge x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow z=3$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(x;y;z)\in\{(2;3;6),(2;4;4),(3;3;3)\}$

Ví dụ 14: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau: x! + y! = (x+y)! (*)

Giải:

Vì vai trò của x, y như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \le x \le y$

Ta có: (x+y)! =x! + y! ≤ 2.y! $\Rightarrow x \le 1$ vì nếu x > 1 thì 2.y! ≥ (y+2)!

2.y! ≥ y! (y+1)(y+2) $\Leftrightarrow 2 \ge (y+1)(y+2)$ (vô lí vì y≥1)

Vậy x = 1 Thay vào PT (*) ta có 1+y! = (y+1)! $\Leftrightarrow 1+y! = y!(y+1) \Leftrightarrow y.y! = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy phương trình có nghiệm x = y = 1

2.áp dụng bất đẳng thức cổ điển.

Ví dụ 15 Tìm các số nguyên dương x, y thoả mãn phương trình : $(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si ta có :

$x^2 + 1 \ge 2x$, dấu bằng xẩy ra khi x = 1.

$x^2 + y^2 \ge 2xy$, dấu bằng xẩy ra khi x = y.

Vì x, y nguyên dương nên nhân các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được :

$(x^2 + 1)(x^2 + y^2) \ge 4x^2y$, dấu bằng có khi và chỉ khi x = y = 1.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 1.

Ví dụ 16: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $(x+y+1)^2 = 3(x^2+y^2+1)$

Giải:

áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có $(x+y+1)^2 \le (1+1+1)(x^2+y^2+1)$

Dấu bằng xẩy ra khi $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{1} = 1$ hay x = y = 1

Vậy Phương trình có nghiệm x = y = 1

Ví dụ 17: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3$$

Giải:

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2)^3 + (y^2+5)^3 + z^3 = 3x^2z(y^2+5)$$

áp dụng bất đẳng thức côsi cho 3 số ta có : $(x^2)^3 + (y^2+5)^3 + z^3 \ge 3x^2z(y^2+5)$ Dấu = xây ra khi $x^2 = y^2+5 = z$ Từ phương trình $x^2 = y^2+5 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 5 \Rightarrow x = 3; y = 2 \Rightarrow z = 9$

Vậy nghiệm của phương trình là (x;y;z) = (3;2;9).

Ghi chú:

Việc áp dụng bất đẳng thức vào giải phương trình nghiệm nguyên rất ít dùng vì ẩn ý dùng bất đẳng thức rất dễ bị lộ . Tuy nhiên cũng có một vài trường hợp dùng bất đẳng thức khá hay như ví dụ sau:

Ví du 18.1: ***Gi***ải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$3(x^4+y^4+x^2+y^2+2)=2(x^2-x+1)(y^2-y+1)$$

Giải:

Ta có $(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2+x+1\right) \geq x^2-x+1$

Do $x^4+x^2+1=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right) \geq \frac{1}{3}\left(x^2-x+1\right)^2$ (*)

Tương tự ta cũng có $y^4+y^2+1 \geq \frac{1}{3}\left(y^2-y+1\right)^2$ (**)

Cộng theo vế của (*) và (**) ta có

$$x^4+y^4+x^2+y^2+2 \geq \frac{1}{3}\left(x^2-x+1\right)^2+\frac{1}{3}\left(y^2-y+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+x^2+y^2+2 \geq \frac{1}{3}\left[\left(x^2-x+1\right)^2+\left(y^2-y+1\right)^2\right] \geq \frac{1}{3}.2\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^4+y^4+x^2+y^2+2\right) \geq 2\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)$$

Dấu "=" xẩy ra khi x = y= 1

Vậy nghiệm của phương trình là x = y= 1.

Ví du 18.2: ***Gi***ải phương trình nghiệm nguyên dương sau với x, y, z là các số đôi một khác nhau. $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^2$

Giải:

áp dụng bất đẳng thức $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^2 \geq \frac{(x+y+z)^3}{9} \Rightarrow x+y+z \leq 9$$

Vì x, y, z đôi mộ khác nhau suy ra $x+y+z \geq 1+2+3=6 \Rightarrow x+y+z \in \{6;7;8\}$

Lần lượt thử các giá trị của $x+y+z$ ta tìm được (x;y;z)= (1;2;3) và các hoán vị của nó.

3. áp dụng tính đơn điệu của từng vế:

Ta chỉ ra một hoặc một vài giá trị của biến thoả mãn phương trình rồi chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Ví du 19: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau: $3^x + 4^x = 5^x$

Giải:

Chia cả hai vế của phương trình cho 5^x ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Thử với x = 1 ta thấy không phải là nghiệm nguyên của phương trình.

Với x = 2 ta có VT =VP = 1 thoả mãn bài toán.

Với $x \geq 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$ và $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$ suy ra $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

Vậy Phương trình có nghiệm duy nhất x = 2.

Từ ví dụ 19: suy ra cách làm bài tập sau: Tìm số tự nhiên x sao cho $\left(\sqrt{3}\right)^x + \left(\sqrt{4}\right)^x = \left(\sqrt{5}\right)^x$

Đối với phương trình trên ta còn có bài toán tổng quát hơn.

Tìm các số nguyên dương x; y; z thoả mãn $3^x + 4^y = 5^z$.

đáp số: x = y = z = 2 nhưng cách giải trên vô tác dụng với bài này.

(Đểgiải bài này thì hữu hiệu nhất là xét Modulo).

4. Dùng điều kiện $\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm.

Ví du 20:

Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + 2y^2 = 2xy + 2x + 3y$

Giải:

$x^2 + 2y^2 = 2xy + 2x + 3y \Leftrightarrow x^2 - 2x(y+1) + 2y^2 - 3y = 0$ ta

có: $\Delta' = (y+1)^2 - (2y^2 - 3y) = -y^2 + 5y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{29}}{2} \leq y \leq \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

Vì y nguyên nên y $\in \{0;1;2;3;4;5\}$ Thay lần lượt các giá trị của y vào phương trình và tìm x tương ứng ta được: $(x;y) \in \{(0;0);(2;0)\}$

Nhận xét: ***Nói chung phương pháp này được dùng khi f(x ; y) có dạng tam thức bậc hai f(z) = az² + bz + c trong đó a <0 .***

còn khi a > 0 thì dùng phương pháp đã nói trong ví du 3 để đưa về phương trình ước số một cách nhanh chóng.

PHƯƠNG PHÁP 4: *PHƯƠNG PHÁP CHẶN HAY CÒN GỌI LÀ PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ.*

Chủ yếu dựa vào hai nhận xét sau:

- **Không tồn tại** $n \in Z$ **thỏa mãn** $a^2 < n^2 < (a+1)^2$ **với a là một số nguyên.**
- **Nếu** $a^2 < n^2 < (a+2)^2$ **với** $a; n \in Z$ **thì n = a + 1.**

Ta có ví dụ sau:

Ví du 21: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^4 + x^2 + 1 = y^2$

Giải:

Xét hiệu $(x^2+1)^2 - y^2 = x^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2+1)^2 \geq y^2$

Xét hiệu $y^2 - x^4 = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow y^2 > x^4$

Suy ra: $(x^2)^2 < y^2 \leq (x^2+1)^2 \Rightarrow y^2 = (x^2+1)^2$ Thế vào phương trình ban đầu ta có:

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Nhận xét trên có thể mở rộng với số lập phương ta có ví dụ sau:

Ví du 22: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^3 - y^3 = 2y^2 + 3y + 1$

Giải:

Bằng cách biên đổi như ví dụ trên ta có: $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3 \Rightarrow x = y; \quad x = y+1.$

Lần lượt xét các trường hợp x = y và x = y +1 ta tìm được nghiệm của phương trình: $(x; y) \in \{(-1;-1); (1;0)\}$.

PHƯƠNG PHÁP 5: *DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG.*

Các tính chất thường dùng :

– Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

– Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2.

– Số chính phương khi chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

– Số chính phương chia cho 5, cho 8 thì số dư chỉ có thể là 0, 1 hoặc 4.

– Số chính phương lẻ chia cho 4, 8 thì số dư đều là 1.

– Lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 8.

…

CHUYÊN ĐỀ: Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

Dạng 1: sử dụng mệnh đề 1 sau:

với x, y, z nguyên và xy = z^2 với (x;y) = 1 thì $\begin{cases} x = k^2 \\ y = t^2 \text{ voi } \quad k,t \in Z \\ kt = z \end{cases}$

Thật vậy ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng:
Giả sử x, y không là số chính phương nên trong phân tích thành số nguyên tố của x hoặc y tồn tại một số chứa ít nhất một số nguyên tố p với số mũ lẻ.(số p với số mũ lẻ trái với điều kiện z^2 là số chính phương) suy ra điều phải chứng minh.

Ví du 23:

Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2x^4 + 3x^2 + 1 - y^2 = 0$

Giải:

$2x^4 + 3x^2 + 1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2+1)(x^2+1) = y^2$

Ta có: $(2x^2+1; x^2+1) = 1$

Suy ra: $\begin{cases} x^2 + 1 = t^2 \\ 2x^2 + 1 = z^2 \end{cases}$ Từ phương trình $x^2 + 1 = t^2 \Leftrightarrow (x-t)(x+t) = -1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Dạng 2: sử dụng mệnh đề 2 sau:

Nếu n; t là các số nguyên thoả mãn n(n+1) = t^2 thì hoặc n = 0 hoặc n+1 =0.

Chứng minh:

Giả sử $n \neq 0; \quad n+1 \neq 0 \Rightarrow t \neq 0$

Vậy

$n^2 + n = t^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n = 4t^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2 = 4t^2 + 1 \Leftrightarrow (2n+1)^2 - 4t^2 = 1 \Leftrightarrow (2n+1-2t)(2n+1+2t) = 1$

Vì n; t là các số nguyên nên từ phương trình ước số trên suy ra n=0 hoặc n =-1 $\Rightarrow (Dpcm)$

áp dụng mệnh đề trên để giải phương trình nghiệm nguyên trong ví dụ sau:

Ví du 24: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + 2xy + y^2 + 5x + 5y = x^2y^2 - 6$

Giải:

$x^2 + 2xy + y^2 + 5x + 5y = x^2y^2 - 6 \Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+3) = x^2y^2$

$\Rightarrow x + y + 2 = 0$ hoặc $x + y + 3 = 0$ từ đó tìm được nghiệm nguyên của phương trình.

Phương trình này vẫn còn có những cách giải khác nhưng việc dùng mệnh đề trên giúp cho lời giải bài toán trở nên ngắn gọn hơn.

PHƯƠNG PHÁP 6: *PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN.*

(HAY CÒN GỌI LÀ PHƯƠNG PHÁP XUỐNG THANG).

Phương pháp này dùng để chứng minh một phương trình f(x,y,z,…) nào đó ngoài nghiệm tầm thường x = y = z = 0 thì không còn nghiệm nào khác.
Phương pháp này được diễn giải như sau:
Bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0;y_0;z_0,...)$ ***là nghiệm của f(x,y,z,…). Nhờ những biến đổi, suy luận số học ta tìm được một bộ nghiệm khác*** $(x_1;y_1;z_1;...)$ ***sao cho các nghiệm quan hệ với bộ nghiệm đầu tiên bởi một tỷ số k nào đó. Ví dụ:*** $x_0 = kx_1; y_0 = ky_1; z_0 = kz_1;...$
Rồi lại từ bộ $(x_2;y_2;z_2;...)$ ***sao cho các nghiệm quan hệ với bộ nghiệm*** $(x_1;y_1;z_1;...)$ ***bởi một tỷ số k nào đó. Ví dụ:*** $x_1 = kx_2; y_1 = ky_2; z_1 = kz_2;...$ ***Quá trình tiếp tục dẫn đến*** $x_0;y_0;z_0,...$ ***chia hết cho*** k^s ***với s là một số tự nhiên tuỳ ý điều này xẩy ra khi và chỉ khi x = y = z =…= 0.***
Để rõ ràng hơn ta xét ví dụ sau:

Ví du 25: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + y^2 = 3z^2$

Giải:

Gọi $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm của phương trình trên. Xét theo mod3 ta chứng minh $x_0;y_0$ chia hết cho 3. Thật vậy: rõ ràng vế phải chia hết cho 3 suy ra: $x_0^2 + y_0^2 \vdots 3$ ta có:
$x_0^2 \equiv 0;1(\text{mod}\,3); y_0^2 \equiv 0;1(\text{mod}\,3)$ do đó: $x_0^2 + y_0^2 \vdots 3 \Rightarrow x_0 \vdots 3;\quad y_0 \vdots 3$
đặt $x_0 = 3x_1; y_0 = 3y_1; z_0 = 3z_1$ thế vào và rút rọn ta được $3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2 \Rightarrow z_0 \vdots 3 \Rightarrow z_0 = 3z_1$
Thế vào và rút gọn ta được. $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$ do đó nếu $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm của phương trình trên thì $(x_1;y_1;z_1)$ cũng là nghiệm của phương trình trên. tiếp tục quá trình suy luận trên dẫn đến $x_0;y_0;z_0 \vdots 3^k$ điều đó chỉ xẩy ra khi. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Ví du 26: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Giải:

Giả sử $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm của phương trình trên. ${x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 = 2x_0y_0z_0$
$\Rightarrow {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2$ chẵn (do $2x_0y_0z_0$ chẵn) nên có hai trường hợp xẩy ra.
Trường hợp 1: Có hai số lẻ, một số chẵn. Không mất tính tổng quát ta giả sử x_0,y_0 lẻ; z_0 chẵn. Xét theo mod4 ta có: ${x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 \equiv 2(\text{mod}\,4)$ còn $2x_0y_0z_0 \vdots 4$ (do z_0 chẵn)$\Rightarrow$ vô lý
Trường hợp 2: cả 3 số đều chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1; y_0 = 2y_1; z_0 = 2z_1$ thế vào và rút gọn ta có:
${x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 = 4x_1y_1z_1$ lập luân như trên ta được $x_1;y_1;z_1$ chẵn
Quá trình lại tiếp tục đến $x_0;y_0;z_0 \vdots 2^k$ với $k \in N^*$ điều đó xẩy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$
Tóm lại nghiệm của phương trình là $(x_0;y_0;z_0) = (0;0;0)$

PHƯƠNG PHÁP 7: *NGUYÊN TẮC CỰC HẠN*
(HAY CÒN GỌI LÀ NGUYÊN LÍ KHỞI ĐẦU CỰC TRỊ)

Về mặt hình thức thì phương pháp này khác với phương pháp lùi vô hạn nhưng về ý tưởng sử dụng thi như nhau. đều chứng minh phương trình ngoài nghiệm tầm thường không có nghiệm nào khác.
Phương pháp bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0;y_0;z_0,...)$ là nghiệm của f(x;y;z;…) với điều kiện ràng buộc với bộ$(x_0;y_0;z_0,...)$. Ví dụ như x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0+y_0+z_0+...$nhỏ nhất…
Bằng những phép biến đổi số học ta tìm được một bộ nghiệm khác $(x_1;y_1;z_1;...)$trái với điều kiện ràng buộc trên. Ví dụ khi chọn bộ $(x_0;y_0;z_0,...)$ với x_0 nhỏ nhất ta lại tìm được bộ $(x_1;y_1;z_1;...)$ thoả mãn $x_1<x_0$ từ đó dẫn đến phương trình đã cho có nghiệm $(x_0;y_0;z_0)=(0;0;0)$.
Ta xét ví dụ sau:

Ví du 27: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$.

Giải:

Giả sử $(x_0;y_0;z_0,t_0)$ là nghiệm của $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$ với điều kiện x_0 nhỏ nhất
Từ phương trình suy ra t chẵn. Đặt t = 2.t_1 thế vào và rút gọn ta được: $4{x_0}^4+2{y_0}^4+{z_0}^4=8{t_1}^4$
Rõ ràng z_0 chẵn. Đăt $z_0=2.z_1\Rightarrow 2x_0^4+y_0^4+8z_1^4=4t_1^4$ $\Rightarrow$ y_0 chẵn. Đăt $y_0=2.y_1$
$\Rightarrow x_0^4+8y_1^4+4z_1^4=2t_1^4$ $\Rightarrow$ x_0 chẵn. Đăt $x_0=2.x_1$ $\Rightarrow 8x_1^4+4y_1^4+2z_1^4=t_1^4$ $\Rightarrow(x_1;y_1;z_1;t_1)$ cũng là nghiệm của phương trình trên và dễ thấy $x_1<x_0$ (vô lý do ta chọn x_0 nhỏ nhất). Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất. $(x;y;z;t)=(0;0;0;0)$.

Chú ý trong ví dụ trên ta cũng có thể chọn $x_0+y_0+z_0$ nhỏ nhất lý luận như trên ta cũng dẫn đến $x_1+y_1+z_1<x_0+y_0+z_0$ từ đó cũng dẫn đến kết luận của bài toán.

PHƯƠNG PHÁP 8: *SỬ DỤNG MỆNH ĐỀ CƠ BẢN CỦA SỐ HỌC.*

Trước tiên ta đến với bài toán nhỏ sau.

Cho p là số nguyên tố có dạng $p = k.2^t + 1$ với t nguyên dương; k là số tự nhiên lẻ. CMR nếu $x^{2^t} + y^{2^t} \vdots p$ thì $x \vdots p; \quad y \vdots p.$

Chứng minh.

Giả sử $x \not\vdots p \Rightarrow y \not\vdots p.$ theo Ferma nhỏ $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p; y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$; $p = k.2^t + 1$ nên

$$\begin{cases} x^{k.2^t} \equiv 1 \pmod p \\ y^{k.2^t} \equiv 1 \pmod p \end{cases} \Rightarrow x^{2^t} + y^{2^t} \equiv 2 \pmod p$$

Mặt khác do k lẻ nên theo hằng đẳng thức $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ ta có: $x^{k.2^t} + y^{k.2^t} = \left(x^{2^t} + y^{2^t}\right).A$

(A là một số nào đó).

Rõ ràng $x^{k.2^t} + y^{k.2^t} \equiv 0 \pmod p$ (do giả thiết $x^{2^t} + y^{2^t} \vdots p$)

Do đó theo ví dụ 20, ví dụ 21 thì ta có điều phải chứng minh.

Xét trường hợp nhỏ của bài toán trên:

Khi t= 1; vì k lẻ nên k = 2s+1 $\Rightarrow$ p = 4s+3 lúc đó ta có mệnh đề sau:

P là số nguyên tố có dạng p = 4s+3. Khi đó nếu $x^2 + y^2 \vdots p$ thì $x \vdots p; \quad y \vdots p.$

Mệnh đề hết sức đơn giản này lại là một công cụ vô cùng hiệu quả với nhiều bài toán khó.

Ví du28: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 - y^3 = 7$ (*đây là phương trình nhỏ của phương trình Mordell*) phương trình Mordell là phương trình có dạng $x^2 + k = y^3 \quad (k; x; y \in Z)$

Giải:

Trước tiên ta có bổ đề sau:

Mọi số nguyên tố dạng A = 4t+ 3 đều có ít nhất một ước nguyên tố dạng p = 4s +3.

Chứng minh:

Giả sử A không có ước số nào có dang p = 4s +3

$A = (4t_1 + 1)(4t_2 + 1) = 4(4t_1t_2 + t_1 + t_2) + 1 = 4h + 1$ (vô lý) Do đó A có một ước dạng $4t_1$ +3;

Nếu $4t_1$ +3 thì bổ đề được chứng minh.

Nếu $4t_1$ +3 là hợp số lý luận tương tự ta lại có $4t_1$ +3 có một ước số dạng $4t_2$ +3.

Nếu $4t_2$ +3 là hợp số ta lại tiếp tục. Vì quá trình trên là hữu hạn nên ta cố điều phải chứng minh.

Quay lại bài toán. $x^2 = y^3 + 7$

xét y chẵn $\Rightarrow y^3 + 7 \equiv 7 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 7 \pmod 8$ vô lý do $x^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8$)

xét y lẻ viết lại phương trình dưới dạng $x^2 + 1 = y^3 + 8 \Rightarrow x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$

nếu $y = 4k + 1 \Rightarrow y + 2 = 4k + 3$

nếu $y = 4k + 3 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = (4k+3)^2 - 2.(4k+3) + 4 = 4h + 3$ do đó y luôn có một ước dạng 4n + 3 và theo bổ đề trên thì 4n + 3 luôn có ít nhất một ước nguyên tố p = 4s +3

$\Rightarrow x^2 + 1 \vdots p = 4s + 3$ theo mệnh đề trên $x \vdots p; \quad y \vdots p.$ (*vô lí*) Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Ví du 29: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2+5=y^3$

Giải

Xét y chẵn $\Rightarrow y^3 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow x^2+5 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 3 \pmod 8$ Vô lý vì $x^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8$.

Xét y lẻ nếu y = 4k+ 3 $\Rightarrow y^3 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow x^2+5 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 4$

(vô lí vì $x^2 \equiv 0;1 \pmod 4$)

Nếu y = 4k+1 viết phương trình dạng $x^2+4=y^3-1 \Rightarrow x^2+4=(y-1)(y^2+y+1)$

Rõ ràng $y^2+y+1=(4k+1)^2+(4k+1)+1=4t+3$

Do đó y^3-1 có ít nhất một ước nguyên tố p = 4s +3.

$\Rightarrow x^2+4 \vdots p=4s+3 \Rightarrow 4 \vdots p \Rightarrow p=2$ (vô lý do đó phương trên vô nghiệì cuối cùng để thấy thêm sự hiệu quả cuả mệnh đề này ta đến với bài toán Euler.

Ví du 30: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $4xy-x-y=z^2$

Giải:

Cách 1: *Lời giải của Euler*

Giả sử phương trình có tập nghiệm $(x;y;z)=(a;b;c)$ với c là giá trị nhỏ nhất của z.

Suy ra: $4ab-a-b=c^2 \Rightarrow 16ab-4a-4b=4c^2 \Rightarrow (16ab-4a)-(4b-1)-1=4c^2$ (*)

Cộng vào hai vế của (*) $4(4a-1)^2-8(4a-1).c$ ta có:

$$(4a-1)(4b-1)-(4b-1)-1+[4(4a-1)^2-8(4a-1).c]=4c^2+[4(4a-1)^2-8(4a-1).c]$$

$$\Rightarrow (4a-1)\left[4(b+4a-1-2c)-1\right]=4\left[c-(4a-1)\right]^2 \quad (**)$$

Vậy nếu phương trình (*) có nghiệm là (a;b;c) thì phương trình (*) cũng có nghiệm là (a;b+4a-1-2c;c-4a+1)

Vì c là giá trị nhỏ nhất của z suy ra $z=\left|c-(4a-1)\right|^2>c^2 \Rightarrow$

$$4\left[c-(4a-1)\right]^2=(4a-1)\left[4b-1+4(4a-1)-8c\right]>4c^2=(4a-1)(4b-1)-1$$

$$\Rightarrow 4b-1+4(4a-1)-8c>(4b-1)$$

$$\Rightarrow \left[4b-1+4(4a-1)-8c\right]>(4b-1)$$

$$\Rightarrow 4(4a-1)-8c>0 \Rightarrow 4a-1>2c \quad (1)$$

Vì a và b có vai trò như nhau nên ta có $4b-1>2c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $4a-1 \ge 2c+1; \quad 4b-1 \ge 2c+1$

PT (*): $4c^2=(4a-1)(4b-1) \ge (2c+1)^2-1 \Rightarrow 4c^2 \ge 4c^2+4c \Rightarrow c \le 0$ vô lí

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Cách 2: *dùng mệnh đề trên.*

$4xy - x - y = z^2 \Leftrightarrow 4(4xy - x - y) = 4z^2 \Leftrightarrow 16xy - 4x - 4y = 4z^2$

$\Leftrightarrow (4x-1)(4y-1) = 4z^2 + 1 \Leftrightarrow (4x-1)(4y-1) = (2x)^2 + 1^2$

Rõ ràng $4x-1; 4y-1$ đều có dạng 4t + 3

Thật vậy: 4x-1 = 4(x-1)+3; 4y-1 = 4(y-1)+3.

Do đó $(4x-1)(4y-1)$ có it nhât một ước nguyên tố p = 4s +3.$\Rightarrow z^2+1 \vdots p = 4s+3$

$\Rightarrow 1 \vdots p$ vô lý do đó phương trình trên vô nghiệm.

Các dạng cơ bản của phương trình vô định nghiệm nguyên đã giới thiệu với các bạn ở trên. Việc sắp xếp các dạng, phương pháp là chủ ý của tôi nên ít nhiều sẽ sai sót. Sau đây là phần nói thêm về một số phương trình nghiệm nguyên khác.

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP KHÁC.

1)Phương trình dạng mũ:

(thường sử dụng phương pháp xét modulo nhưng không phải là luôn luôn).

Ví du 31: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2^x + 7 = y^2 \quad (x, y \in Z)$

Giải:

x = 0 phương trình không có nghiệm nguyên

$x = 1 \Rightarrow y = \pm 3$

xét $x \geq 2 \Rightarrow 2^x \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2^x + 7 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow y^2 \equiv 3 \pmod 4$ vô lí vì $y^2 \equiv 0;1 \pmod 4$

vậy nghiệm của phương trình $(x;y) \in \{(1;3);(1;-3)\}$.

Ví du 32: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2^x + 21 = y^2 \quad (x, y \in Z)$

Giải:

Xét x lẻ, đặt x= 2k +1 $\Rightarrow 2^x = 2.4^k = 2(3+1)^k \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^x + 21 \equiv 2 \pmod 3$

$\Rightarrow y^2 \equiv 2 \pmod 3$ (Vô lí) vì $y^2 \equiv 0;1 \pmod 3$

Xét x chẵn, đặt x= 2k $\Rightarrow 2^{2k} + 21 = y^2 \Rightarrow y^2 - 2^{2k} = 21 \Rightarrow (y - 2^k)(y + 2^k) = 21$ là phương trình ước số nên ta dễ dàng tìm được $(x;y) \in \{(2;5);(2;-5)\}$

Ví du 33: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau: $2^x + 2^y + 2^z = 2336$ với $x < y < z$.

Giải:

$2^x + 2^y + 2^z = 2336 \Leftrightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2336 = 2^5.73$ ta có $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ là số lẻ

Vậy $\begin{cases} 2^x = 2^5 & (1) \\ 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 73 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra x = 5 thay vào (2) ta có $1 + 2^{y-5} + 2^{z-5} = 73 \Leftrightarrow 2^{y-5} + 2^{z-5} = 72$

$\Leftrightarrow 2^{y-5} + 2^{z-5} = 2^3.9 \Leftrightarrow 2^{y-5}(1 + 2^{z-y}) = 2^3.9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2^{z-y}=9 \\ 2^{y-5}=2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{z-y}=2^3 \\ 2^{y-5}=2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-y=3 \\ y-5=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ z=11 \end{cases}$

Vậy $(x;y;z)=(5;8;11)$

Chú ý: *Với cách giải trên ta có thể giải được bài toán sau: tìm nghiệm nguyên của phương trình* $2^x+2^y+2^z=2^n \quad (x\le y\le z; n\in Z)$

KQ: $(x;y;z)=(n-2;n-2;n-1)$

Ví du 34: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau $5x^3=3^y+317$

Giải:

Trong phương trình này có sự tham gia của số lập phương và như đã nói ở phần phương pháp lựa chọn modulo thì trong bài này ta lựa chon mod9

Ta có: với y =1 suy ra x = 4.

Với $y\ge 2 \Rightarrow 3^y\equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow 5x^3=3^y+317\equiv 2 \pmod 9$ vô lý vì $5x^3\equiv 0;4;5 \pmod 9$

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) = (4;1).

Ta đến với bài toán khó hơn.

Ví du 35: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau $x^y=y^x$

Giải:

Rõ ràng x = y là một nghiệm.

xét $x\ne y$ không mất tính tổng quát ta giả sử x<y $\Rightarrow \sqrt[x]{x^y}=y \Leftrightarrow x^{\frac{y}{x}}=y$ do y nguyên nên $x^{\frac{y}{x}}$ nguyên $\Rightarrow y \vdots x$ đăt y =tx thế vào ta được: $x^t=tx \Rightarrow x^{t-1}=t$ rõ ràng $t\ge 2$ vì đãgiả sử $x\ne y$ ta có $t=2\Rightarrow x=2; y=4$ với $t\ge 3 \Rightarrow x\ge 2$ ta chứng minh $x^{t-1}>t$ do $x\ge 2$ nên ta chỉ việc chứng minh $2^{t-1}>t$ ta chứng minh bằng quy nạp theo t.

ta có: t = 3 đúng.

Giả sử khẳng định đúng với t = k tức là $2^{k-1}>k$ ta chứng minh khẳng định đúng với t = k+1

Tức là $2^k \succ k+1$

Thật vậy: theo giả thiết quy nạp ta có: $2^{k-1}>k \Rightarrow 2^k>2k>k+1$ (vì k >1)

Do đó phương trình vô nghiệm với $t\ge 3$

Vậy nghiệm của phương trình trên là: $(x;y)\in\{(a;a);(2;4);(4;2)\}$ với a $\in Z$.

Ví du 36: Giải phương trình nghiệm nguyên không âm sau: $2^x-3^y=1$

Giải:

Xét theo mod3

Ta có: $2^x-1=3^y$ xét với y = 0 suy ra x = 1.

xét $y\ge 1 \Rightarrow 3^y\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 2^x-1\equiv 0 \pmod 3$

mặt khác $2^x-1=(3-1)^x-1\equiv(-1)^x-1 \pmod 3 \Rightarrow x$ chẵn vì x chẵn thì $(-1)^x-1\equiv 0 \pmod 3$

Đặt x = 2k ta có $2^{2k}-1=3^y \Leftrightarrow (2^k-1)(2^k+1)=3^y$

$$\begin{cases} 2^k+1=3^u \\ 2^k-1=3^v \Rightarrow (2^k+1)-(2^k-1)=2=3^u-3^v \Rightarrow 3^v+2=3^u \\ u+v=y \end{cases}$$

Nếu u = 0 suy ra 3^v=-1 vô lý.

Nếu u≥$1 \Rightarrow 3^u \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3^v+2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow v=0 \Rightarrow u=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $(x;y) \in \{(1;0);(2;1)\}$

2)Bài toán với các nghiệm nguyên tố:

Ví du 37: Tìm $n \in N$ để:

a) n^4+n^2+1 là số nguyên tố. b) n^5+n+1 là số nguyên tố c) n^4+4^n là số nguyên tố

Giải:

a) ta có $n^4+n^2+1=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$ là số nguyên tố khi $n^2-n+1=1 \Rightarrow n=1$

b) $n^5+n+1=(n^2+n+1)(n^3-n^2+1)$ là số nguyên tố khi $n^3-n^2+1=1 \Rightarrow n=1$

c) Chú ý là n lẻ $\Rightarrow n+1 \vdots 2$ $\Rightarrow n^4+4^n=\left(n^2+2^n+2^{\frac{n+1}{2}}\right)\left(n^2+2^n-2^{\frac{n+1}{2}}\right)$ là số nguyên tố khi

$n^2+2^n-2^{\frac{n+1}{2}}=1 \Rightarrow$ n=1

Ví du 38: Tìm các số nguyên tố x ;y ;z thoả mãn $x^y+1=z^2$

Giải

Với x lẻ$\Rightarrow x^y+1=z^2$ chẵn $\Rightarrow z$ chẵn mà lại là số nguyên tố nên z = 2

$\Rightarrow x^y=3$ (không tồn tại x; y thoả mãn).

Xét x chẵn: $\Rightarrow x=2$ vậy $x^y+1=z^2 \Leftrightarrow 2^y+1=z^2$

Nếu y lẻ đặt y = 2k + 1:$\Rightarrow 2^y=2.4^k \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^y+1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow z^2 \vdots 3 \Rightarrow z=3 \Rightarrow y=3$

Nếu y chẵn $\Rightarrow y=2$ $\Rightarrow 5=z^2$ vô lý vậy phương trình đã cho có nghiệm: $(x;y,z)=(2;3;3)$

Với cách làm tương tự ta có thể giải quyết được bài toán sau: Tìm các số nguyên tố x ;y ;z thoả mãn $x^y+1=z$.

3)Các phương trình chứng minh có vô số nghiêm:

Ví du 39: Chứng minh rằng phương trình $x^3+y^3=z^4$ có vô số nghiệm.

Giải:

Ta xây dựng nghiệm của phương trình này. $x^3+y^3=z^4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^3+\left(\frac{y}{z}\right)^3=z$

đăt $\frac{x}{z}=a;$ $\frac{y}{z}=b \Rightarrow x=az;$ $y=bz$ thế vào phương trình ta được

$z^3(a^3+b^3)=z^4 \Rightarrow z=a^3+b^3 \Rightarrow x=az=a(a^3+b^3); y=bz=b(a^3+b^3)$

Vậy phương trình có vô số nghiệm dạng: $(x;y;z)=\left(a(a^3+b^3);b(a^3+b^3);a^3+b^3\right)$.

***Chú ý** công thức trên chưa chắc đã quét hết nghiệm của bài toán xong ta chỉ cần như vậy để giải quyết bài toán này.*

Ví du 40: Chứng minh rằng phương trình $x^4+y^3=z^7$ có vô số nghiệm.

Giải:

Ta có $2^a+2^a=2^{a+1}$ Đăt $x=2^{\frac{a}{4}}$; $y=2^{\frac{a}{3}}$ ta có: $x^4+y^3=2^a+2^a=2^{a+1}$ chọn $z=2^{\frac{a+1}{7}}$ do x;y;z nguyên nên $\begin{cases} a\,\vdots\,3 \\ a\,\vdots\,4 \\ a+1\,\vdots\,7 \end{cases} \Leftrightarrow a=84t+48$ $(t\in Z)$ Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm dạng $(x;y;z)=\left(2^{21t+12};2^{28t+16};2^{12t+7}\right)$.

CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Giải các phương trình sau trên Z.

1) $3x+7y=9$
2) $25x+7y=16$
3) $x^2+3xy-y^2+2x-3y=5$
4) $2x^2+3y^2+xy-3x-3=y$
5) $x_1^4+x_2^4+x_3^4+...+x_{14}^4=1599$
6) $x^2+y^2=16z+6$
7) $x!+y!=z!$
8) $x!+y!=(x+y)!$
9) $19x^3-17y^3=50$
10) $5x^3+11y^3+13z^3=0$
11) $x^2=y^2+16$
12) $x^2+y^2=6\left(z^2+t^2\right)$
13) $xy-2y-3x+x^2=3$
14) $5\left(x^2+y^2+xy\right)=7(x+2y)$
15) $x^3-y^3-xy=15$
16) $x^2+xy+y^2=x+y$
17) $1+x+x^2+x^3=y^2$ *(GVG tỉnhVP năm 2001)*
18) $x^3+y^3=(x+y)^2$
19) $y^3-x^3=2x+1$
20) $x^4+x^2+4=y^2-y$
21) $x^2+y^2=7z^2$
22) $x^2=y^3+16$ *(HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2009)*
23) $x^2+y^2+z^2=x^2.y^2$

24) $6\left(6x^2+3y^2+z^2\right)=5t^2$

25) $19x^2+28y^2=2001$

26) $x^2+xy+y^2=2x+y$

27) $x^2.y^2=z^2\left(z^2-x^2-y^2\right)$

28) $n^4+2n^3+2n^2+2n+1=y^2$

29) $x^3.z^2+\left(y^3-2xy\right)z+x\left(x-y\right)=0$ (AM- 2005)

30) $x^4+x^2-y^2+y+10=0$

31) $2\left(x+y+z\right)+9=3xyz$

Các bài toán với số nguyên tố.

33) tìm $x\in N$; x^4+4^x là số nguyên tố.

34) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{p}$ $\left(x,y\in Z;p\in P\right)$

35) $\left(p-1\right)!+1=p^n$ ($n\in N,p$ là số nguyên tố)

36) $p\left(p+1\right)+q\left(q+1\right)=n\left(n+1\right)$ $\left(p;q;n\right)$ là các số nguyên tố)

37) $p^2=8q+1$ (p; q là các số nguyên tố).

Các bài toán khó.

38) (APMO) Tìm n nguyên dương để phương trình sau có nghiệm.

$$x^n+\left(2-x\right)^n+\left(2+x\right)^n$$

39) (BRAZIL 1990) Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm

$$a^3+1990b^3=c^4$$

40) Tìm x; y nguyên dương để : $1!+2!+3!+...+x!=y^z$

41)Tìm các số nguyên dương x,y,z biết: $2x^x=y^y+z^z$ *(NGA 2008)*

42) (IMO 2006). Tìm các số nguyên dương x; y để: $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$

43) Tìm các số nguyên x;y;z thoả mãn $28^x=19^y+87^z$

44) Tìm các số nguyên dương n và k thoả mãn $k=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$

45) Tìm x;y;z biết $x^4+y^4=z^4$ $\left(x;y;z\in Z^+\right)$

C. KẾT LUẬN.

Tổng hợp các dạng toán và phương pháp giải cho một nội dung toán học nào đó là một việc làm rất cần thiết trong công việc dạy học toán nói chung, dạy học và bồi dưỡng học sinh giỏi nói riêng. Nó giúp cho các em tự tin hơn khi làm các dạng bài tập trong một chủ đề đó, đặc biệt là khi tham gia các kì thi chọn học sinh giỏi.

Trong chuyên đề này tôi chỉ mới đề cập đến vấn đề nghiệm nguyên (cụ thể là các dạng và phương pháp giải) chứ không đi sâu vì vốn hiểu biết còn có hạn.

Trên đây là suy nghĩ và tổng hợp của bản thân về một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên, xin được trao đổi cùng các bạn đồng nghiệp. Rất mong nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

Chân thành cảm ơn!

KÍ DUYỆT CỦA TỔ TRƯỞNG **NGƯỜI VIẾT CHUYÊN ĐỀ**

Tạ Văn Đức

PHỤ LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

1) **Nâng cao và phát triển toán 6,7,8,9** - ***Vũ Hữu Bình – NXB GD***

2) **1001 bài toán sơ cấp BD HSG toán THCS** - ***Lê Hồng Đức - Đào Thiện Khải.***

3) **Tổng hợp toán tuổi thơ năm 2009**- ***NXB GD***

4) **Tuyển chọn các bài thi HSG Toán THCS** - ***Lê Hồng Đức***.

5) **Phương trình nghiệm nguyên** - ***Vũ Hữu Bình***.

6) **Tạp chí Toán học tuổi trẻ**. – ***NXB GD***

7) **Các đề thi vào trường chuyên lớp chọn trong và ngoài tỉnh**.

8) **Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS – *Lê Đức Thịnh.***

Xin chân thành cảm ơn các tác giả.

MỤC LỤC.